

Bautechnik-Archiv

HEFT 6



Berlin 1951

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Bautechnik-Archiv

HEFT 6

INHALT:

Der I-Träger unter Belastung durch Drehmomente.

Von Dr.-Ing. Karl Adolf Müller, Friedberg bei Augsburg.

Die Berechnung kreisförmiger zentralsymmetrischer Fundamentplatten nach dem Differenzenverfahren.

Von Prof. Dr.-Ing. Günter Worch, München.

Das Knickproblem bei Spitzenpfählen, deren Schaft ganz oder teilweise in nachgiebigem Boden steht.

Von Dr.-Ing. Helmut Walter, Grün & Bilfinger A. G., Wiesbaden-Schierstein.

Mit 57 Textabbildungen.



Berlin 1951

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.

Fotomechanische Wiedergabe nur mit ausdrücklicher Genehmigung durch den Verlag

Printed in Germany

Copyright 1951 by Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Satz: VEB Offizin Haag-Drugulin in Leipzig - III/18/38

Druck: Oskar Zach oHG., Berlin-Wilmersdorf, Babelsberger Str. 40-41

Der I-Träger unter Belastung durch Drehmomente

Ein Beitrag zur Lösung verschiedener Probleme mit den Methoden der gewöhnlichen Baustatik

Von Dr.-Ing. Karl Adolf Müller, Friedberg bei Augsburg

I. Vorbemerkungen

Der durch Drehmomente senkrecht zu seiner Achse belastete I-Träger zeigt bekanntlich die Erscheinung, daß die in den einzelnen Querschnitten wirkenden Verdrehungsmomente nicht allein durch Torsionsspannungen, sondern auch durch in der Flanschebene wirkende Querkkräfte übertragen werden. Diese Querkkräfte verursachen eine Ausbiegung der Trägerflansche, so daß bei der Verdrehung der Querschnitte diese nicht eben bleiben, sondern proportional zu den durch die Flanschbiegung erzeugten Dehnungen der Flanschfasern verwölbt werden. In der Literatur wird diese Art der Verdrehung auch mit Wölbkrafttorsion bezeichnet, im Gegensatz zur reinen Drillung, bei der die Drehmomente allein durch Torsionsspannungen aufgenommen werden und die Querschnitte ganz oder nahezu eben bleiben. Dies ist der Fall bei allen geschlossenen Querschnitten.

Das Problem wurde grundsätzlich erstmals von Timoshenko¹⁾ behandelt. Eine zusammenfassende Darstellung der Berechnung des I-Trägers unter der Wirkung von Drehmomenten findet sich bei Unold²⁾. Die Arbeit behandelt den geraden Stab und den Kreisträger. Für die Verformung sind Differentialgleichungen aufgestellt, deren Lösung aber sehr unbequem ist, insbesondere durch die Berücksichtigung der Lagerungsart an den Enden, so daß die Anwendung nur auf wenige, einfache und symmetrische Belastungs- und Tragwerksformen beschränkt bleibt.

Ein allgemein verwendbares Verfahren für den Kreisträger schlägt Stüssi³⁾ vor. Seine Methode ist den üblichen Mitteln der Baustatik angeglichen, indem sie zur Berechnung statisch unbestimmter Auflagergrößen Elastizitätsgleichungen zu Hilfe nimmt und die Flanschbiegemomente mittels Differenzgleichungen zu bestimmen gestattet. Der Anwendungsbereich ist damit wesentlich erweitert, so daß das Problem bei Berücksichtigung verwickelter Lagerbedingungen und verschiedenartiger Belastungsfälle in einer übersichtlichen und nicht zu aufwendigen Berechnung einer einwandfreien Lösung zugänglich ist.

Kurz umrissen ist das Verfahren von Stüssi folgendermaßen aufgebaut:

Ziel der Berechnung: Bestimmung aller statisch unbestimmten Größen. Solche sind die überzähligen Auflagerkräfte und die – bei Einteilung der Trägerlänge in eine Folge endlicher Abschnitte – an den Abschnittsgrenzen wirkend gedachten Flansch- oder Torsionsmomente.

Rechnungsgang:

1. Berechnung der inneren Kräfte (lotrechte Momente und Querkkräfte, Drehmomente) aus einem statisch bestimmten Grundsystem, indem alle statisch unbestimmten Größen gleich Null gesetzt werden.
2. Berechnung des Hauptsystems durch Aufteilung der Drehmomente in Anteile reiner Torsion und Querkkraftbiegung in den Flanschebenen mittels eines dreigliedrigen Gleichungssystems mit den Torsionsmomenten oder den Flanschmomenten als Unbekannten.
3. Aufstellung und Auflösung von Elastizitätsgleichungen am Hauptsystem zur Ermittlung der statisch unbestimmten Auflagergrößen. Anwendung der Superpositionsgleichungen zur Bestimmung der endgültigen Flansch- und Torsionsmomente.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Gedankengang von Stüssi⁴⁾ auf die Anwendung für den geraden Stab und den beliebig gestalteten Stabzug (Balkenträger) erweitert. Auch hier wird die Ermittlung der inneren Kräfte des Hauptsystems auf die Lösung eines dreigliedrigen Gleichungssystems zurückgeführt, wobei für die Aufstellung desselben ein anderer Weg beschritten wird. Im besonderen wird auf die Berechnung der Verformungen eingegangen, für welche sich neue, sehr anschauliche Beziehungen ergeben, die für die einfache Berechnung der äußerlich statisch unbestimmten Größen von großer Bedeutung sind. Ferner wird die Berechnung von Einflußlinien für die Flanschmomente gezeigt; auch hierfür wird eine grundsätzliche Beziehung zur Vereinfachung aufgestellt. Für den geraden Stab mit nur einem äußeren Drehmoment wird ein verkürztes Verfahren entwickelt, das eine rasche Ermittlung der inneren Kräfte ermöglicht.

Die angreifenden Kräfte werden punktweise als Einzellasten angesetzt. Im übrigen werden alle Voraussetzungen gemacht, wie sie für die „Theorie I. Ordnung“ üblich sind, so daß alle Lehrsätze der gewöhnlichen Baustatik gültig bleiben, deren planmäßigem Einbau in das Verfahren größte Aufmerksamkeit zugewendet wird. Die Arbeit setzt achsensymmetrische Querschnitte voraus.

¹⁾ Timoshenko, Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z. f. Math. u. Physik 1910, S. 237.

²⁾ Unold, Der Kreisträger. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 255 Berlin 1922, VDI-Verlag.

³⁾ Stüssi, Der Kreisträger mit I-Querschnitt. Schweiz. Bauztg. Bd. 111, Nr. 14, Sonderheft Rohn.

⁴⁾ Der Verfasser hat unabhängig vor einigen Jahren die gleiche Methode gefunden. Die Arbeit von Stüssi wurde ihm inhaltlich erst durch die freundliche Vermittlung von Herrn Prof. Dr. K. Klöppel, Darmstadt, bekannt.

II. Der gerade I-Träger

Zur Bestimmung der inneren Kräfte wird der Stab einer Folge von Punkten k entsprechend in eine Reihe endlicher Abschnitte a_k unterteilt gedacht. Die Punktfolge k wird dabei zweckmäßigerweise so gewählt, daß die Lage der äußeren Drehmomente mit gewissen Punkten k zusammenfällt. Je enger die Punktfolge ist, desto genauer wird die Berechnung, wobei aber zur Erzielung ausreichend genauer Ergebnisse nicht zu gewissenhaft vorgegangen zu werden braucht. Meist ist es möglich, mit einer regelmäßigen Punktfolge k und damit mit lauter gleichen Abständen $a_k = a$ auszukommen, was die Berechnung wesentlich vereinfacht. In der folgenden Entwicklung wird diese Möglichkeit vorausgesetzt. Es werden zunächst die Beziehungen zwischen den äußeren und inneren Kräften und den Verformungen aufgestellt, sodann werden die Bedingungen besprochen, die bei Berechnung äußerlich statisch unbestimmter Größen anzuwenden sind. Schließlich wird die Ermittlung von Einflußlinien gezeigt und einige Sonderfälle und Zahlenbeispiele erläutert.

a) Die Beziehungen am Grundsystem

Das Grundsystem soll dadurch gekennzeichnet sein, daß in allen Punkten k in die Flansche Gelenke derart eingeschaltet gedacht werden, daß durch sie über den ganzen Querschnitt lediglich Torsionsspannung, nicht aber Flanschbiegemomente übertragen werden können. Die Querschnitte können für das Grundsystem damit als wölbfrei angesehen werden. Im Gegensatz zu der Festlegung bei Stüssi wird hier nicht gefordert, daß das Grundsystem statisch bestimmt gelagert ist. Man wird die Entfernung der Überzähligen so vornehmen, daß einfache Grundformen des Tragwerkes entstehen. Beim geraden Träger wird dabei bezüglich der Lagerung der Flanschenenden entweder der Balken auf zwei Stützen nach Abb. 1a oder der Kragträger

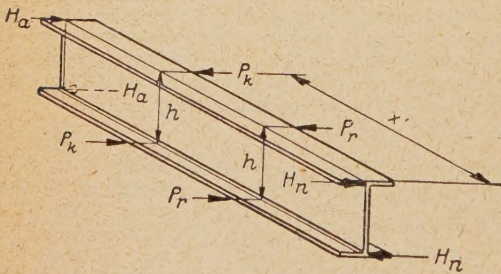


Abb. 1a.

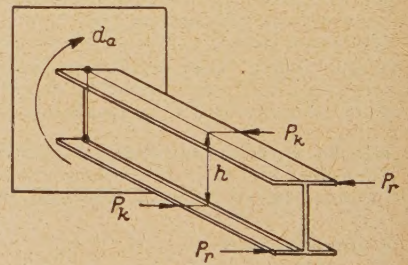


Abb. 1b.

nach Abb. 1b mit gelenkigem Flanschanschluß als Grundsystem zu wählen sein. Der Kragträger ist statisch bestimmt gelagert; das Drehmoment am Auflager ergibt sich eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen. Der Träger auf zwei Stützen hingegen ist einfach statisch unbestimmt; zur Bestimmung der Reaktionsmomente ist hier eine Formänderungsbedingung heranzuziehen. An Hand der Abb. 1a und 2 soll die Berechnung der Auflagerkräfte H_a und H_n kurz besprochen werden. Dabei sei der allgemeine Fall vorausgesetzt, daß Trägheitsmoment J und Drillungswiderstand J_d mit den Abschnitten a_k wechseln.

Mit $H_a \cdot h = d_a$, $H_n \cdot h = d_n$ und $P_k \cdot h = D_k$ ergibt sich aus der Forderung des Gleichgewichtes gegen Verdrehen nach Abb. 2 für die im Querschnitt m wirkenden Verdrehungsmomente

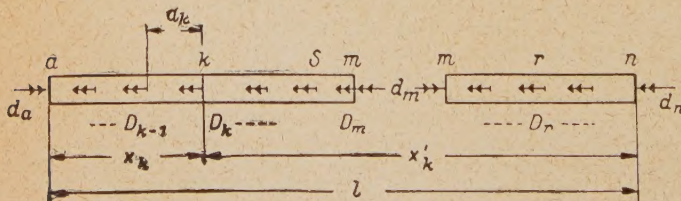


Abb. 2.

$$d_m = d_a - \sum_1^m D_k \quad \dots \quad (1)$$

und

$$d_a + d_n = \sum_1^{n-1} D_k \quad \dots \quad (1a)$$

Der Verdrehungswinkel ϑ_m im Querschnitt m gegen das Auflager a errechnet sich mit $a_k' = a_k \cdot \frac{J_d}{J_{d_k}}$ zu

$$\vartheta_m = \frac{d_a}{G J_d} \sum_1^m a_k' - \frac{\sum_1^{m-1} D_k \sum_{k+1}^m a_s'}{G J_d} = \frac{d_a}{G J_d} \sum_1^m a_k' - \frac{\sum_1^m a_k' \sum_1^{k-1} D_s}{G J_d}.$$

Fordert man zur Bestimmung der Überzähligen d_a , daß der Verdrehungswinkel in n verschwindet, so wird aus

$$\frac{d_a}{G J_d} \sum_1^n a_k' - \frac{\sum_1^{n-1} D_k \sum_{k+1}^n a_s'}{G J_d} = 0,$$

$$d_a = \frac{\sum_1^{n-1} D_k \sum_{k+1}^n a_s'}{\sum_1^n a_k'} = 0. \quad \dots \quad (2)$$

Für konstantes Trägheitsmoment und Drillungswiderstand ergibt sich daraus mit $a_k' = a_k$ und nach Abb. 2 mit $\sum_1^n a_k = l$ und $\sum_{k+1}^n a_s = x_k'$

$$d_a = \sum_1^{n-1} D_k \frac{x_k'}{l}. \quad \dots \quad (2a)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für den Belastungsfall nach Abb. 10a, von dem im Verlaufe der Abhandlung noch mehrmals die Rede sein wird:

$$d_a = -d_n = \frac{a_1' X_I \cdot h}{a_1 G J_d \cdot \sum_1^n a_k'} \quad \dots \quad (2b)$$

und für konstanten Querschnitt

$$d_a = -d_n = \frac{X_I \cdot h}{l}. \quad \dots \quad (2c)$$

Im weiteren wird konstanter Querschnitt vorausgesetzt, und nur wo es notwendig erscheint auf Besonderheiten bei wechselndem Verlauf hingewiesen.

b) Die Berechnung des Hauptsystems

Das Hauptsystem soll dadurch gekennzeichnet sein, daß alle am Grundsystem ausgeschalteten Flanschbiegemomente zur vollen Wirksamkeit gelangen.

Sie zu berechnen besteht die Aufgabe nun darin, die beiden Anteile aus den Drehmomenten d_k zu ermitteln, die einerseits durch reine Torsion und andererseits durch die Verbiegung der Flansche aufgenommen werden. In Abb. 3 sind die in den Querschnitten dreier aufeinanderfolgender Punkte $m-1, m, m+1$ wirkenden inneren Kräfte eingetragen. Die Flanschbiegemomente F und die hieraus entstehenden Flanschquerkräfte V mögen für den Oberflansch gelten. Im Unterflansch sind sie gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet. Die Torsionsmomente sind mit T bezeichnet. Man erhält hiernach:

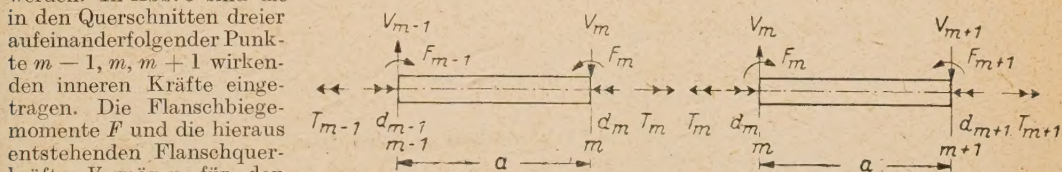


Abb. 3.

Aus der Forderung des Gleichgewichtes gegen Verdrehen

$$d_m = T_m + V_m \cdot h, \quad \dots \quad (3)$$

wobei der Hebelarm h der gegenseitige Abstand der Flanschschwerpunkte ist, aus der Forderung des Gleichgewichtes des Stababschnittes $m-1, m$ gegen Verdrehen

$$T_m - T_{m-1} - d_m + d_{m-1} + V_m \cdot h - V_{m-1} \cdot h = 0 \quad \dots \quad (4)$$

und aus der Forderung des Gleichgewichtes eines Stababschnittes gegen horizontales Ausdrehen

$$-F_{m-1} + F_m = V_{m-1} \cdot a. \quad \dots \quad (5)$$

Wird (5) in (4) eingesetzt, so wird zunächst

$$T_m - T_{m-1} = d_m - d_{m-1} - (F_{m-1} - 2F_m + F_{m+1}) \cdot \frac{h}{a}. \quad \dots \quad (6)$$

Eine weitere Gleichung, mit Hilfe deren die Differenz $T_m - T_{m-1}$ eliminiert werden kann, gewinnt man aus den Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Formänderungen des Trägers.

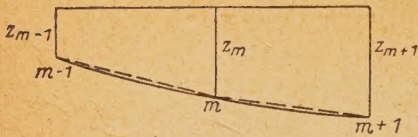


Abb. 4.

Abb. 4 zeigt die Ausbiegung des Trägers oberflansches innerhalb des Abschnittes $m-1, m, m+1$. In diesen Punkten ist die horizontale Auslenkung z_{m-1}, z_m, z_{m+1} . Entsprechend ist die Ausbiegung des Unterflansches $-z_{m-1}, -z_m, -z_{m+1}$. Wegen des kontinuierlichen Biegungsverlaufes muß nun gefordert werden, daß die Biegelinie in den Punkten k keinen Knick aufweisen darf. Diese Forderung erfüllt die bekannte W -Gewichts-Beziehung:

$$\frac{a}{6 E J_f} (F_{m-1} + 4 F_m + F_{m+1}) = - \frac{z_{m-1} - 2 z_m + z_{m+1}}{a} \quad (7)$$

$$\left(J_f = \text{Trägheitsmoment des Einzelflansches} = \frac{1}{2} J_y \right).$$

Eine ähnliche Beziehung ergibt sich zwischen den Ausbiegungen und den Torsionsmomenten wie folgt:

Der Querschnitt m verdreht sich gegen den Querschnitt $m-1$ um den Winkel $\vartheta_m = (z_m - z_{m-1}) \cdot \frac{2}{h}$

(vgl. Abb. 5).

Diese Verdrehung erzeugt ein Torsionsmoment

$$T_{m-1} = \frac{2 G J_d}{h \cdot a} (z_m - z_{m-1}), \quad (8a)$$

$$T_m = \frac{2 G J_d}{h \cdot a} \cdot (z_{m+1} - z_m). \quad (8b)$$

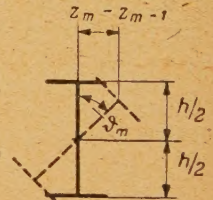


Abb. 5.

Es muß hier hervorgehoben werden, daß bei vorstehender Berechnungsweise die Drehmomente d_m nach (1) feldweise bis zur Angriffsstelle jeweils eines neuen äußeren Drehmomentes D_k konstant verlaufen. Das gleiche gilt für die Flanschquerkräfte, da die Momente festsetzungsgemäß von Punkt zu Punkt linear verlaufen. Hieraus ergibt sich nach (3), daß auch die Torsionsmomente feldweise konstant sind. Die Bezeichnungsweise in Abb. 3 ist demnach so zu verstehen, daß die Einleitungsstellen der äußeren Drehmomente jeweils kurz vor den rechten Enden der Trägerabschnitte liegen.

Zieht man (8a) von (8b) ab, so erhält man

$$T_m - T_{m-1} = \frac{2 G J_d}{a \cdot h} (z_{m-1} - 2 z_m + z_{m+1}). \quad (9)$$

Eliminiert man weiter den Klammerausdruck mittels (7), so wird

$$T_m - T_{m-1} = - \frac{G J_d}{3 E J_f} \cdot \frac{a}{h} (F_{m-1} + 4 F_m + F_{m+1}). \quad (10)$$

Schließlich erhält man durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (6) und (10) ein dreigliedriges Gleichungssystem zur Berechnung der Flanschmomente F :

$$F_{m-1} (1 - e) + F_m (4 + 2 e) + F_{m+1} (1 - e) = - (d_m - d_{m-1}) \frac{e a}{h} \quad (11)$$

mit

$$e = \frac{3 h^2}{a^2} \cdot \frac{E J_f}{G J_d} \quad \text{bzw. für } G = 0,385 E \text{ mit } e = 3,9 \frac{J_y}{J_d} \cdot \frac{h^2}{a^2}.$$

Die Gleichungen können sowohl für den Träger mit freidrehbaren als auch mit eingespannten Flanschen benutzt werden. Im ersten Falle sind sie aufzustellen für alle Punkte, mit Ausnahme der Endpunkte, im zweiten Fall sind auch die Endpunkte in das Gleichungssystem mit einzubeziehen, so daß also zwei Gleichungen mehr zu lösen sind, wie es der Natur der zweifachen äußeren statischen Unbestimmtheit dieses Falles entspricht. Es gilt dann für die Endpunkte:

$$F_0 (2 + e) + F_1 (1 - e) = - d_a \frac{e a}{h}. \quad (11a)$$

Statt dessen kann natürlich auch der Momentenverlauf am Hauptsystem ohne Flanscheinspannung bestimmt und der Einfluß der Randmomente als äußerlich statisch unbestimmter Größen in einem gesonderten Rechnungsgang ermittelt werden. Davon wird im Abschnitt d) gesprochen werden.

⁵⁾ Vgl. z. B. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, S. 175. Leipzig 1934, Baumgärtners Buchhandlung.

Sind die Flanschmomente bekannt, so ergeben sich die Torsionsmomente leicht aus (3), was mittels (5) zu

$$T_m = d_m - (F_{m+1} - F_m) \frac{h}{a} \dots\dots\dots (12)$$

führt. Die Biegelinie des Flansches kann nach (8a) ermittelt werden zu

$$z_m = \frac{a h}{2 G J_d} T_{m-1} + z_{m-1} = \frac{a h}{2 G J_d} \sum_1^{m-1} T_k \dots\dots\dots (13)$$

Es brauchen aber nicht erst die Torsionsmomente bestimmt zu werden, um die Biegelinie zu berechnen. Man erhält sie einfacher, wenn man die Beziehung von (12) für (13) ausnützt. Es wird mit dieser Operation

$$z_m = \frac{a h}{2 G J_d} \left\{ \sum_1^{m-1} d_k - \frac{h}{a} \left(\sum_1^{m-1} F_{k+1} - \sum_1^{m-1} F_k \right) \right\} = \frac{h^2}{2 G J_d} \left(\frac{a}{h} \sum_1^{m-1} d_k - F_m \right).$$

Entsprechend der Definition von d_a und D_k wird aus (1) für irgendeinen Punkt s :

$$\frac{a}{h} (H_a \cdot h - \sum_0^s D_k) = \frac{a}{h} \cdot d_s = Q_s \cdot a,$$

also die a -fache Querkraft der Flansche infolge P_k . Damit wird $\sum_1^{m-1} Q_s \cdot a = M_{0m}$, d. h. das Moment des Flansches infolge der horizontalen Kräfte P_k , wenn jeder Flansch ohne Zusammenhang mit dem Steg für sich allein auf Biegung beansprucht würde.

Man kann also schreiben

$$z_m = \frac{h^2}{2 G J_d} (M_{0m} - F_m) \dots\dots\dots (14)$$

und den Satz aussprechen:

Die Ordinate der Biegelinie ist bei konstantem Querschnitt proportional der Differenz zwischen den Ordinaten der Zustandslinien für das Flanschmoment ohne Zusammenhang mit den Stegen und das tatsächliche Flanschmoment.

Dieser Satz wird sich als besonders nützlich erweisen bei der Aufstellung der Elastizitätsgleichungen für die Berechnung der äußerlich statisch unbestimmten Größen. Bevor jedoch darauf eingegangen wird, wird ein vereinfachtes Verfahren bei ganz oder teilweise homogenem Gleichungssystem erläutert.

c) Vereinfachte Berechnung bei homogenem Gleichungssystem

Wirkt auf das Tragwerk nur ein äußeres Drehmoment $P_s \cdot h = D_s$ im Punkte s , so sind alle Gleichungen (11) mit Ausnahme derjenigen für s homogen, da d_k beiderseits s bis zu den Auflagern hin konstant verläuft und demnach für alle Punkte k mit Ausnahme von s $d_k - d_{k-1} = 0$ wird.

Mittels (1) wird für s

$$d_s = d_a - \sum_a^s D_k$$

und

$$d_{s-1} = d_a - \sum_a^{s-1} D_k.$$

Man erhält damit

$$d_s - d_{s-1} = -D_s$$

und die Gleichung für den Punkt s lautet:

$$F_{s-1} (1 - e) + F_s (4 + 2e) + F_{s+1} (1 - e) = D_s \frac{e a}{h}.$$

Für alle übrigen Gleichungen verschwindet die rechte Seite, wenn man nur Tragwerke mit gelenkig gelagerten Flanschenden in Betracht zieht.

Diese Tatsache kann in einem für die Abkürzung der Berechnung günstigen Sinne ausgenützt werden. Man erkennt leicht, daß bei homogenen Gleichungen die Flanschmomente von oder bis zur Laststelle s einen eindeutigen, lediglich von einem noch gesondert zu bestimmenden Festwert abhängigen Verlauf haben. Man braucht nur F_1 in der ersten Gleichung als Unbekannte zu belassen und kann dann alle übrigen Momentenwerte F_k als Funktionen von F_1 ausdrücken. Geht man auf diese Weise von einem Flanschende 0 aus vor, so ergeben sich alle Momentenwerte F_k bis zur Angriffsstelle s zu:

$$F_k = F_1 \cdot u_k, \dots\dots\dots (15)$$

worin F_1 den noch unbekannten Momentenwert im Punkte 1 und u_k einen mit der Punktfolge k veränderlichen Faktor darstellt. u_k läßt sich rasch und einfach mittels folgender aus dem Gleichungssystem (11) gewonnenen Rekursionsformel berechnen:

$$u_k = -u_{k-2} - \frac{4 + 2e}{1 - e} u_{k-1} \dots\dots\dots (16)$$

Der Anfangswert u_1 hat dabei die Größe 1.

Für den Träger auf zwei Stützen kann nun weiter folgendermaßen vorgegangen werden:

Mit (15) ist der Momentenverlauf des Trägerabschnittes $0 - s$ proportional zu F_1 eindeutig festgelegt.

Ebenso ist auch vom anderen Ende n her zu verfahren, wobei mit Einführung der Punktfolge $\bar{k}$ und $n = \bar{0}$ für den Trägerabschnitt $n - s$ der Momentenverlauf als $\bar{F}_k = \bar{F}_1 \cdot u_k$ zu bestimmen ist. Es bleibt dann lediglich die Aufgabe, die noch unbekannten Anfangsmomente F_1 und $\bar{F}_1$ aus geeigneten Bestimmungsgleichungen zu ermitteln. Dazu stehen folgende Bedingungen zur Verfügung:

1. Das Moment F_k muß das gleiche sein, gleichgültig, ob man von 0 her oder von n her rechnet, also

$$F_1 u_k = \bar{F}_1 \bar{u}_k.$$

Die Gleichung s des Systems (11) muß erfüllt sein, wenn man die Momentenwerte F_{s-1}, F_s, F_{s+1} als Funktionen von F_1 oder $\bar{F}_1$ im Sinne von (15) einsetzt, also

$$F_1 \left(u_{s-1} + u_s \frac{4+2e}{1-e} \right) + \bar{F}_1 \bar{u}_{s-1} = D_s \frac{e}{1-e} \frac{a}{h}.$$

Der Klammerausdruck ist nach (16) $= -u_{s+1}$ und $\bar{F}_1$ nach der erstgenannten Bedingung $= (F_1 \cdot u_s) / \bar{u}_s$. Damit erhält man

$$F_1 = \frac{\frac{e}{1-e} \frac{a}{h} D_s}{\frac{u_{s-1}}{u_s} \cdot u_s - u_{s+1}} \dots \dots \dots (17)$$

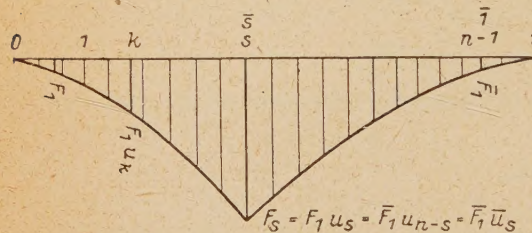


Abb. 6.

In Abb. 6 ist der Momentenverlauf nach diesem Verfahren mit den in obiger Formel angewendeten Bezeichnungen dargestellt.

Das geschilderte Verfahren bleibt in den Grundzügen auch noch mit Vorteil anwendbar, wenn der Träger durch einige wenige äußere Drehmomente belastet ist. Es sind dann die Momenten-

äste $F_1 \cdot u_k$ der einzelnen lastfreien Strecken in sinnvoller Weise aneinander zu reihen, wobei für jede Strecke ein neuer Anfangswert F_1 und für die Berechnung der u_k eine von 0 beginnende und mit dem Ende der Strecke aufhörende Punktfolge anzunehmen ist. Die Werte F_1 sind dann aus geeigneten Bedingungen für die Übergangspunkte eines lastfreien Abschnittes zum nächsten oder, was dasselbe ist, für die Lastangriffspunkte zu bestimmen. Die Wertfolge u_k bleibt dabei immer die gleiche, da gleichmäßige Punktfolge und konstantes J_f und J_d vorausgesetzt ist. Eine Möglichkeit, auf diese Weise den Momentenzustand zu berechnen, zeigt Abb. 7. In den Punkten s und t greifen die äußeren Drehmomente D_s und D_t an. Betrachtet man nacheinander die Abschnitte $0 - n$, $s - n$ und $t - n$ als lastfrei, so läßt sich für jeden ein zugehöriger Momentenverlauf aus den jeweiligen homogenen Systemen nach (15) angeben, und zwar für

$$\begin{aligned} 0 - n: & F_1 \cdot u_k \\ s - n: & F_1^s \cdot u_{k-s} \\ t - n: & F_1^t \cdot u_{k-t}. \end{aligned}$$

Um zur tatsächlichen Momentenzustandslinie zu gelangen, sind diese drei Äste derart zu superponieren, daß die Summe ihrer Werte für den Punkt n verschwindet, daß also $F_1 \cdot u_n + F_1^s \cdot u_{n-s} + F_1^t \cdot u_{n-t} = 0$, woraus zunächst

$$F_1 = - \frac{F_1^s \cdot u_{n-s} + F_1^t \cdot u_{n-t}}{u_n} \dots \dots \dots (17a)$$

zu berechnen ist.

Die Superpositionsgleichung für F_k lautet:

$$F_k = F_1 \cdot u_k + F_1^s \cdot u_{k-s} + F_1^t \cdot u_{k-t} \dots \dots \dots (18)$$

Die Beiwerte F_1^s und F_1^t sind aus den Gleichungen für s und t des Systems (11) zu bestimmen, wenn man darin für die drei aufeinanderfolgenden Momente F_{s-1}, F_s, F_{s+1} usw. die rechten Seiten der Superpositionsgleichung einführt. Es ergibt sich für s :

$$F_1 \left(u_{s-1} + u_s \frac{4+2e}{1-e} + u_{s+1} \right) + F_1^s = D_s \frac{e}{1-e} \frac{a}{h}$$

und daraus mit

$$\begin{aligned} u_{s-1} + u_s \frac{4+2e}{1-e} &= -u_{s+1} \\ F_1^s &= D_s \frac{e}{1-e} \frac{a}{h}. \end{aligned}$$

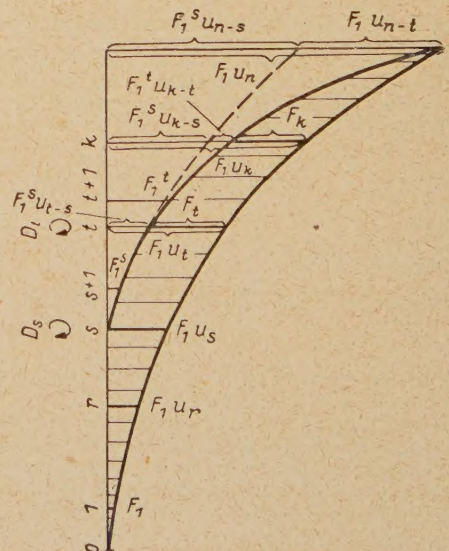


Abb. 7.

Analog wird

$$F_1^t = D_t \frac{e}{1-e} \frac{a}{h}.$$

Die Werte u_k steigen mit wachsender Punktfolge rasch an, so daß ersichtlich wird, daß die Berechnung der Momentenzustandslinie nach (18) tunlichst nur mit der Rechenmaschine vorgenommen werden sollte; denn die Momentenwerte F_k ergeben sich als Differenzen großer Zahlen von ähnlichem Wert. Deshalb werden besser die Zustandslinien getrennt für die einzelnen äußeren Drehmomente nach dem zuerst geschilderten Verfahren für Einzeldrehmomente bestimmt und zum Gesamtergebnis superponiert.

Es bleibt noch zu erwähnen, daß die Gleichung (17a) für den Fall der Belastung durch nur ein äußeres Drehmoment gegenüber der gleichbedeutenden Gleichung (17) wesentlich zu vereinfachen ist. Setzt man in (17a)

für F_s^1 den errechneten Wert $D_s \frac{e}{1-e} \frac{a}{h}$ ein, so erhält man

$$F_1 = -D_s \frac{e \cdot a \cdot u_{n-s}}{(1-e) h \cdot u_n}, \quad \dots \dots \dots (17b)$$

bzw. in der Bezeichnungsweise von (16)

$$F_1 = -D_s \frac{e \cdot a \cdot u_s}{(1-e) \cdot h \cdot u_n}.$$

Analog ist

$$\bar{F}_1 = -D_s \frac{e \cdot a \cdot u_s}{(1-e) \cdot h \cdot u_n}. \quad \dots \dots \dots (17c)$$

Das geschilderte Verfahren gilt in analoger Weise auch für den Kragträger. Lediglich die Bedingungen für die Berechnung des Festwertes F_1 sind andere. Beim Kragträger mit eingespanntem Flanschende ist beispielsweise die Bedingung heranzuziehen, daß an der Einspannstelle die Tangente an der Biegelinie = 0 sein muß, was mittels (14) in der Berechnung bequem zu berücksichtigen ist.

Im Abschnitt g) Zahlenbeispiele ist das obengeschilderte Verfahren eingehend erläutert. Es wird gezeigt werden, daß seine Anwendung außerordentlich einfach ist und mit dem Rechenschieber gute Ergebnisse erzielt werden.

Bevor im weiteren auf die Berechnung der äußerlich statisch unbestimmten Größen eingegangen wird, muß noch auf einen besonderen Belastungsfall hingewiesen werden, der einerseits sehr bequem mittels des vereinfachten Verfahrens gelöst werden kann und andererseits bei der Berechnung der äußerlich statisch Unbestimmten sehr häufig auftritt. Es ist dies die Belastung des Trägers auf zwei Stützen durch ein Momentenpaar ± 1 in Flanschenebene (die Vorzeichen entsprechen dem Ober- bzw. dem Unterflansch). Dieser Fall ist in Abb. 8 bildlich dargestellt. Das Gleichungssystem ist hierfür auf die ganze Trägerlänge mit Ausnahme der Einspannstelle homogen, so daß die Ordinaten der Momentenzustandslinie entsprechend der Punktfolge k nach (15) sofort angeschrieben werden können zu

$$F_k = F_1 \cdot u_k,$$

wobei die Punktfolge von dem der Einspannstelle gegenüber liegenden

Ende aus angeschrieben wird. Für n muß F_k den Wert 1 annehmen, womit sich ohne weiteres ergibt

$$F_1 = \frac{1}{u_n}. \quad \dots \dots \dots (19)$$

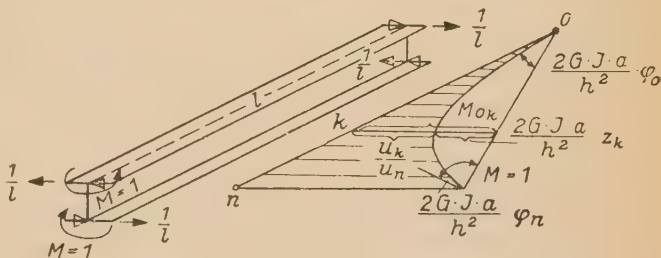


Abb. 8.

d) Die Berechnung der äußerlich statisch unbestimmten Größen

Die Berechnung der äußerlich statisch unbestimmten Größen ist im Sinne der Baustatik am statisch unbestimmten Hauptsystem vorzunehmen. Nachdem die Bestimmung der inneren Kräfte und Formänderungen des Hauptsystems in den vorhergehenden Abschnitten hinreichend besprochen wurde, ist die Aufstellung der Formänderungsgrößen und Elastizitätsgleichungen mit bekannten, in der Baustatik üblichen Methoden durchführbar. Der Rechnungsgang sei der Vollständigkeit wegen kurz wiederholt, wobei auf ausnutzbare Vereinfachungen im besonderen hingewiesen wird.

Die Flansch- und Torsionsmomente seien für die einzelnen Zustände am Hauptsystem folgendermaßen bezeichnet:

$\bar{F}_m^0, \bar{T}_m^0$ infolge der äußeren Drehmomente,

$\bar{F}_m^I, \bar{T}_m^I$ infolge einer äußerlich statisch unbestimmten Größe $X_I = -1$ und entsprechend

$\bar{F}_m^{II}, \bar{T}_m^{II}$ infolge $X_{II} = -1$ usw.

Die Formänderungsgrößen berechnen sich damit in bekannter Weise zu

$$\begin{aligned} a_{0I} &= \int \bar{F}_m^\circ \bar{F}_m^I \frac{ds}{E J_F} + \int \bar{T}_m^\circ \bar{T}_m^I \frac{ds}{G J_d}, \\ a_{0II} &= \int \bar{F}_m^\circ \bar{F}_m^{II} \frac{ds}{E J_F} + \int \bar{T}_m^\circ \bar{T}_m^{II} \frac{ds}{G J_d}, \\ a_{I I} &= \int \bar{F}_m^I \bar{F}_m^I \frac{ds}{E J_F} + \int \bar{T}_m^I \bar{T}_m^I \frac{ds}{G J_d}, \\ a_{II II} &= \int \bar{F}_m^I \bar{F}_m^{II} \frac{ds}{E J_F} + \int \bar{T}_m^I \bar{T}_m^{II} \frac{ds}{G J_d} \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Schließlich ergeben sich aus den Kontinuitätsbedingungen die Elastizitätsgleichungen für die Lösung der Unbestimmten zu

$$\left. \begin{aligned} a_{I I} \cdot X_I + a_{I II} \cdot X_{II} + a_{I III} \cdot X_{III} + \dots &= a_{0I} \\ a_{II I} \cdot X_I + a_{II II} \cdot X_{II} + a_{II III} \cdot X_{III} + \dots &= a_{0II} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

usw.

Die Berechnung der Formänderungsgrößen wird wesentlich einfacher, wenn man vom Reduktionssatz Gebrauch macht. In seinem Sinne ist es nicht nötig, beide Schnittgrößen unter dem Integralzeichen vom Hauptsystem (= statisch unbestimmtes Hauptsystem) einzuführen, vielmehr kann eine Schnittgröße aus dem Grundsystem übernommen werden, so daß z. B.

$$\int \bar{F}_m^\circ \bar{F}_m^I \frac{ds}{E J_F} + \int \bar{T}_m^\circ \bar{T}_m^I \frac{ds}{G J_d} = \int \bar{F}_m^\circ \bar{F}_m^I \frac{ds}{E J_F} + \int \bar{T}_m^\circ \bar{T}_m^I \frac{ds}{G J_d} = \int \bar{F}_m^\circ F_m^I \frac{ds}{E J_F} + \int \bar{T}_m^\circ T_m^I \frac{ds}{G J_d}.$$

$F_m^\circ, F_m^I, T_m^\circ, T_m^I$ bedeuten darin Zustände am Nullsystem, worin voraussetzungsgemäß $F_m^\circ = 0, T_m^\circ = d_m^\circ$ und $T_m^I = d_m^I$ ist.

Dennoch bleibt die Berechnung der Formänderungsgrößen auf diese Weise recht zeitraubend, einmal deshalb, weil die Zustandlinien für die Torsionsmomente auf jeden Fall ermittelt werden müssen, auch wenn sie nicht von Interesse sind, und zum anderen, weil die Ausrechnung der Integrale ziemlich umfangreich werden kann. Viel einfacher gestaltet sich die Berechnung, wenn man hierzu von der mit (14) ausgedrückten Beziehung zur unmittelbaren Berechnung der Ausbiegungen z_k aus den Momentenzuständen Gebrauch macht. Allerdings wird von dem schematischen Verlauf der Rechnung damit abgegangen und man muß sich die Bedeutung der einzelnen Formänderungsgrößen immer vergegenwärtigen, was jedoch dem Geübten keine Schwierigkeiten verursacht. Es handelt sich bei den Formänderungsgrößen zumeist um Ausbiegungen z oder um die Winkel φ_0 der Endtangentialen an die Biegelinie. Die ersten ergeben sich unmittelbar aus (14). Die letzteren aus

$$\varphi_0 = \frac{z_1}{a} + \frac{a}{6 E J_F} (2 F_0 + F_1), \dots \dots \dots (21)$$

worin der erste Anteil den Seitenwinkel des Polygonzuges der Biegelinie und der zweite den Verdrehungswinkel des Punktes 0 in Flanschenebene infolge der Biegung des Abschnittes 0 bis 1 für sich allein darstellt. Für den Fall des Trägers auf zwei Stützen unter der Wirkung eines Flanschendementes $X_I = -1$ in 0 sind die Verdrehungswinkel unter Berücksichtigung von (14), (19) und (21) (vgl. Abb. 8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{6 E J_F}{a} \varphi_n &= -2 - \frac{n-1}{n} \cdot e - \frac{u_{n-1}}{u_n} (1-e) \quad \text{und} \\ \frac{6 E J_F}{a} \varphi_0 &= -\frac{e}{n} - \frac{1}{u_n} (1-e). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

Die endgültige Momentenlinie ergibt sich schließlich zu

$$F_k = F_k^\circ - X_I F_k^I - X_{II} F_k^{II} \quad \text{usw.}$$

Die Torsionsmomente können nach (12) berechnet werden, wobei

$$d_k = d_k^\circ - X_I d_k^I - X_{II} d_k^{II} \quad \text{usw.}$$

e) Die Berechnung von Einflußlinien für die Flanschmomente

Für den Träger auf zwei Stützen mit gelenkig gelagerten Flanschenden ist, wenn in k die Last 1 steht, das Moment in i nach (15) unter Berücksichtigung von (17b) (vgl. Abb. 9):

$$F_{ik} = - \frac{D_k \cdot e \cdot a \cdot u_i \cdot u_{n-k}}{(1-e) \cdot h \cdot u_n}.$$

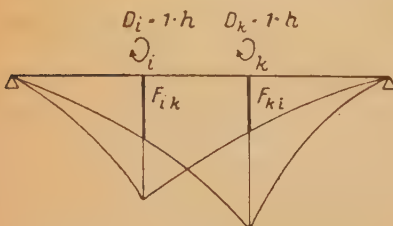


Abb. 9.

Umgekehrt ist das Moment in k , wenn die Einheitslast in i steht, nach (15) unter Berücksichtigung von (17c)

$$F_{ki} = - \frac{D_i \cdot e \cdot a \cdot u_{n-k} \cdot u_i}{(1-e) \cdot h \cdot u_n}.$$

Da voraussetzungsgemäß $D_k = D_i = 1 \cdot h$ sein soll, ergibt sich daraus die wichtige Beziehung

$$F_{ik} = F_{ki}, \quad \dots \quad (23)$$

die besagt, daß die Einflußlinie für das Flanschmoment F_k am Träger auf zwei Stützen mit gelenkig gelagerten Flanschenden gleich ist der Zustandslinie für die Flanschbiegemomente, wenn die Einheitslast in k steht.

Diese Zustandslinie ist nach Abschnitt b) mittels (15), (17b), und (17c) in ganz einfacher Weise rasch anzugeben.

Der mit (23) ausgedrückte Satz ergibt sich übrigens auch unmittelbar aus (14), wenn man bedenkt, daß nach dem Maxwellschen Satz $z_{ki} = z_{ik}$ und daß für den statisch bestimmten Balken auf zwei Stützen $M_{0ik} = M_{0ki}$ ist.

Die Berechnung von Einflußlinien am äußerlich statisch unbestimmten System geht nach den Methoden der Statik unbestimmter Tragwerke vor sich, wobei die Formänderungsgrößen a_{II} , $a_{I II}$ usw. nach Abschnitt c) berechnet werden und die a_{0I} , a_{0II} usw. Biegelinien darstellen. Diese Biegelinien sind sofort aus den Momentenzustandslinien für die Einheiten der statisch unbestimmten Größen am Grundsystem nach (14) anzugeben, was den Rechnungsgang außerordentlich vereinfacht. Es erübrigt sich näher darauf einzugehen. Ähnliche Überlegungen können für die Einflußlinien der Flanschausbiegung angestellt werden.

f) Besondere Überlegungen

1. Das Gleichungssystem (11) könnte den Gedanken nahebringen, die Einteilung des Trägers in eine so große Anzahl von Abschnitten vorzunehmen, daß $e = 1$ wird. Damit würde das erste und dritte Glied der linken Gleichungsseite verschwinden, und F_m könnte sofort berechnet werden aus

$$(4 + 2e) F_m = D_m \frac{ea}{h}.$$

Diese Möglichkeit ist aber nicht verwertbar, da sich die Abschnitte a für praktisch vorkommende Fälle zum Teil größer ergeben würden als die Trägerlänge. Denkt man sich nun tatsächlich einen Stab, der so lang ist, daß er für $e = 1$ noch in mehrere Abschnitte teilbar wäre, so wäre der Sinn obiger Gleichung, daß die Momente in unmittelbarer Nähe der Laststelle m so rasch beiderseits abklingen, daß sie für die benachbarten Punkte $m-1$ und $m+1$ keine Beiträge liefern. Daß das rasche Abklingen bei übermäßig langen Stäben tatsächlich der Fall ist, deutet sich schon beim Zahlenbeispiel 2 an.

2. Die Voraussetzungen zur Einteilung des Trägers in lauter gleiche Abschnitte a , wobei an den Abschnittsgrenzen die äußeren Drehmomente angreifen sollen, sowie die Voraussetzung von konstantem J_F und J_d sind in manchen Fällen nicht gegeben. Die Berechnung bleibt in den Grundzügen jedoch trotzdem im Sinne der vorhergehenden Überlegungen möglich, wenngleich sie sich umfangreicher gestaltet. Nimmt man näherungsweise an, daß J_s und J_d innerhalb gleicher Abschnitte a_k konstant bleiben, dann wird das Gleichungssystem mit

$$\alpha_m = \frac{a_m \cdot G}{3 E J_{Fm}}; \quad \beta = \frac{h^2}{a_m J_{dm}}$$

$$F_{m-1} (\alpha_m - \beta_m) + F_m \{2 (\alpha_m + \alpha_{m+1}) + (\beta_m + \beta_{m+1})\} + F_{m+1} (\alpha_{m+1} - \alpha_{m+1}) = - \frac{d_m h}{J_{dm+1}} + \frac{d_{m-1} h}{J_{dm}}. \quad (11a)$$

Für die Berechnung der Biegelinie des Flansches ergibt sich entsprechend (13)

$$z_m = \frac{h}{2 G J_d} \sum_1^{m-1} T_k \cdot a'_{k+1}, \quad \dots \quad (13a)$$

woraus mittels (12)

$$\left. \begin{aligned} z_m &= \frac{h}{2 G J_d} \sum_1^{m-1} \left(d_k \cdot a'_{k+1} - (F_{k+1} - F_k) \frac{h}{a_{k+1}} a'_{k+1} \right) \\ &= \frac{h}{2 G J_d} \left(\vartheta_{0m} - \sum_1^{m-1} (F_{k+1} - F_k) \frac{h a'_{k+1}}{a_{k+1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14a)$$

wird. ϑ_{0m} stellt in dieser Gleichung den Verdrehungswinkel des Querschnittes m gegen den Auflagerquerschnitt im Grundsystem dar. Man ersieht hieraus, daß bei wechselndem Querschnitt der mit (14) ausgesprochene Satz seine Gültigkeit verliert, da die Momentendifferenz unter der inneren Klammer mit wechselnden Faktoren behaftet ist. Auch die Wechselbeziehung zwischen Belastung und Moment nach (23) ist hier nicht mehr anwendbar: Sie gilt wohl zwischen Belastung und Ausbiegung z_m , Verdrehungswinkel ϑ_{0m} und

damit auch für den Summenausdruck, nicht aber Einzelmoment, so daß eine Nutzenanwendung auf die Berechnung der Einflußlinien nicht möglich ist. Man wird in diesem Falle die üblichen Sätze der Statik für die Berechnung von Einflußlinien statisch unbestimmter Größen anwenden müssen. (Vgl. hierzu Abschnitt III d.)

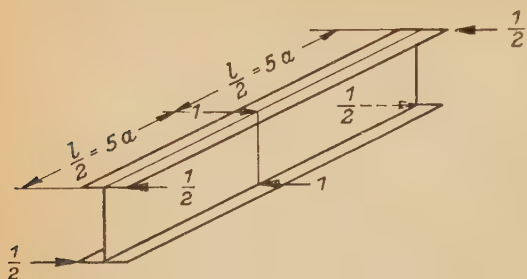


Abb. 10.

Profil I NP 20, $l = 200$ cm, $h = 18,9$ cm,

$J_d = 11,32$ cm⁴, $J_F = 58,5$ cm⁴,

$E = 2150000$ kg/cm²,

$E/G = 2,6$, $a = 20$ cm (= Punktabstand)

$$e = \frac{3 \cdot 2,6 \cdot 58,5 \cdot 18,9^2}{11,32 \cdot 20^2}$$

$$= 35,95, \quad 1 - e = -34,95,$$

$$4 + 2e = 75,9, \quad \frac{4 + 2e}{1 - e} = -2,172.$$

Tabelle 1

Punkt	$-u_{k-1}$	$-\frac{4 + 2e}{1 - e} u_k$	v_{k+1}
0			1,000
1		2,172	2,172
2	— 1,000	4,718	3,718
3	— 2,172	8,075	5,903
4	— 3,718	12,821	9,103
5	— 5,903	19,772	13,869
6	— 9,103	30,110	21,007
7	— 13,87	45,63	31,76
8	— 21,01	68,98	47,97
9	— 31,76	104,19	72,43

Nach (17b, c) $F_1 = \bar{F}_1 = \frac{35,95 \cdot 18,9 \cdot 20 \cdot 9,103}{34,95 \cdot 18,9 \cdot 72,4} = 2,585$ cmt.

Nach (15) $F_5 = 2,585 \cdot 9,103 = 23,53$ cmt (nach Unold 23,72).

Die Torsionsmomente werden nach (12) berechnet. Die Berechnung ist in Tabelle 2 durchgeführt.

Tabelle 2

Punkt	F_m	$F_{m+1} - F_m$	$(F_{m+1} - F_m) \frac{h}{a}$	d_m	T_m
0	0	2,59	2,44	9,45	7,01*)
1	2,59	3,03	2,86	9,45	6,59
2	5,62	3,99	3,78	9,45	5,67
3	9,61	5,65	5,34	9,45	4,11
4	15,26	8,26	7,81	9,45	1,64
5	23,52	— 8,26	— 7,81	— 9,45	— 1,64
6	15,26	— 5,65	— 5,34	— 9,45	— 4,11

*) Nach Unold 7,07.

2. Belastung und Profil wie in Beispiel 1, jedoch mit:

$l = 2000$ cm, $a = 50$ cm,

$$e = \frac{3 \cdot 2,6 \cdot 58,5 \cdot 18,9^2}{11,32 \cdot 50^2} = 5,775, \quad 1 - e = -4,775,$$

$$4 + 2e = 15,55, \quad \frac{4 + 2e}{1 - e} = -3,2566.$$

*) Vgl. Unold, S. 48/49.

Die Zustandslinien für F und T sind in Abb. 11 aufgetragen.

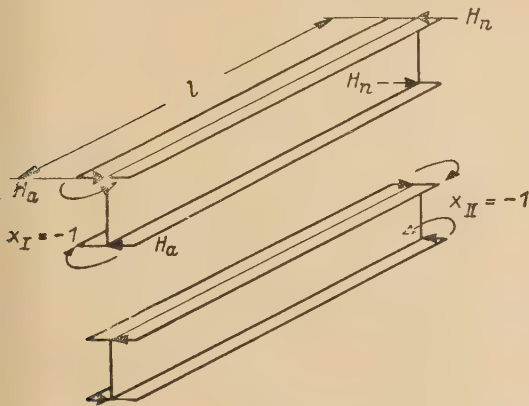


Abb. 10a und b.

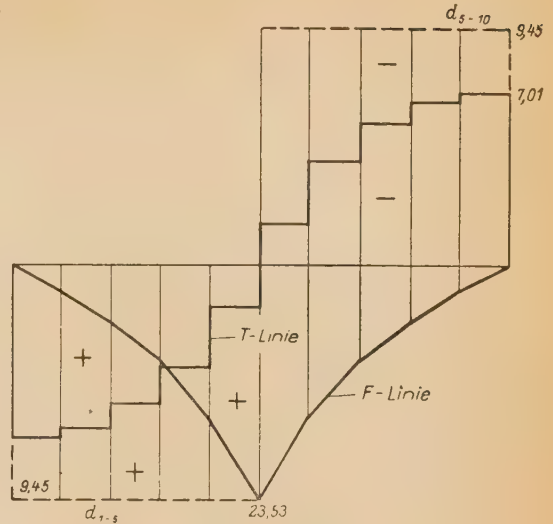


Abb. 11.

Die Wertfolge u_k ist in Tabelle 3 für einige Punkte angegeben

$$\begin{aligned} F_1 = \bar{F}_1 &= \frac{5,775 \cdot 50 \cdot 18,9 \cdot 17139}{4,775 \cdot 18,9 \cdot 755,26 \cdot 10^6} = 1,372 \cdot 10^{-3} \\ F_8 &= 2,019 \cdot 1,372 = 2,775 \text{ cmt} \\ F_9 &= 5,883 \cdot 1,372 = 8,070 \text{ cmt} \\ F_{10} &= 17,14 \cdot 1,372 = 23,55 \text{ cmt.} \end{aligned}$$

3. Beispiel 1, jedoch mit beidseitig eingespannten Flanschen, $a = 20 \text{ cm}$, $e = 35,95$, $1 - e = -34,95$, $4 + 2e = 75,9$, $2 + e = 37,59$.

Berechnung mittels Auflösung des dreigliedrigen Gleichungssystems (11)

$$\begin{aligned} 1. \quad & 37,95 F_0 - 34,95 F_1 = -359,5 \\ 2. \quad & -34,95 F_0 + 75,90 F_1 - 34,95 F_2 = 0 \\ & \dots \\ 6. \quad & -34,95 F_4 + 75,90 F_5 - 34,95 F_6 = +719 \\ 12. \quad & -34,95 F_{11} + 37,95 F_{12} = -359,5. \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt: $F_0 = -18,85 \text{ cmt}$, $F_5 = 18,65 \text{ cmt}$.

Berechnung nach dem vereinfachten Verfahren:

Das Zahlenbeispiel 1 stellt für diesen Fall das Hauptsystem dar. Die Flanschmomente und Torsionsmomente für das Hauptsystem unter der Wirkung des äußeren Drehmomentes in 5 können daher der Tabelle 2 entnommen werden. Als äußerlich statisch unbestimmte Größen werden die Einspannmomente X_I und X_{II} gewählt. (Zustände $X_I = -1$, $X_{II} = -1$, vgl. Abb. 10a u. 10b). Nach (21) wird die Verdrehung in 0 und n des Hauptsystems infolge des äußeren Drehmomentes

Tabelle 3

Punkt	u_k
0	0
1	1
2	3,2566
3	9,6054
5	81,659
8	2019,3
9	5882,9
10	17139
11	49932
12	$145,47 \cdot 10^3$
15	$3597,1 \cdot 10^3$
18	$88983 \cdot 10^3$
20	$755,26 \cdot 10^6$

$$a_{0I} = a_{0II} = \frac{18,9^2}{2 \cdot 20 \cdot G J_d} \left(\frac{200}{4 \cdot 5} - 2,59 \right) + \frac{20 \cdot 2,59}{6 E J_F} = \frac{66,2}{G J_d} + \frac{8,63}{E J_F}.$$

Nach (22) wird die Verdrehung der Endpunkte 0 und n infolge $X_I = -1$ und $X_{II} = -1$

$$\frac{6 E J_F}{a} \cdot a_{I I} = \frac{6 E J_F}{a} \cdot a_{I I I} = -2 - 0,9 \cdot 35,95 + \frac{47,97}{72,43} \cdot 34,95 = -11,15$$

$$\frac{6 E J_F}{a} \cdot a_{I I I} = \frac{6 E J_F}{a} \cdot a_{I I I} = -\frac{35,95}{10} + \frac{34,95}{72,43} = -3,11.$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} -11,15 X_I - 3,11 X_{II} &= \left(\frac{66,2}{G J_d} + \frac{8,62}{E J_F} \right) \cdot \frac{6 E J_F}{a} \\ - 3,11 X_I - 11,15 X_{II} &= \left(\frac{66,2}{G J_d} + \frac{8,62}{E J_F} \right) \cdot \frac{6 E J_F}{a}, \end{aligned}$$

woraus $X_I = X_{II} = -18,85$.

$$F_5 = 23,52 - \frac{9,103}{72,43} \cdot 18,85 \cdot 2 = 18,7 \text{ cmt.}$$

Der Verlauf der Zustandslinien für die Flansch- und Torsionsmomente ist in Abb. 12 aufgetragen.

4. Als weiteres Beispiel für statisch unbestimmte Lagerung wird das Tragwerk nach Abb. 13 berechnet. Es ist der gleiche Träger wie in Beispiel 1 gewählt mit lediglich noch einer horizontalen Stütze des Unterflansches in Trägermitte. Die darin ausgelöste Horizontalkraft wird als äußerlich statisch unbestimmte Größe X eingeführt. Die Zahlenfolge u_k kann nach Tabelle 1 benützt werden. Am Hauptsystem greift in Punkt 2 das äußere Drehmoment $D_2 = 18,9 \text{ cmt an}$. Dadurch wird erzeugt von $0 - 2 \text{ dk}^\circ = +15,12 \text{ cmt.}$ und von $2 - 10 \text{ dk}^\circ = -3,78 \text{ cmt.}$

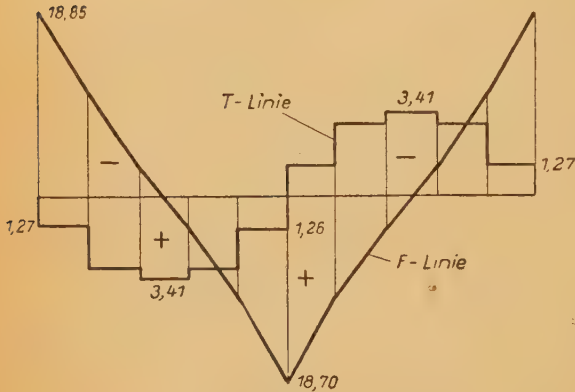


Abb. 12.

$$F_1^\circ = \frac{35,95 \cdot 20 \cdot 18,9 \cdot 31,76}{34,95 \cdot 18,9 \cdot 72,43} = 8,85 \text{ cmt}$$

nach (17b)

$$F_1^\circ = \frac{35,95 \cdot 20 \cdot 18,9 \cdot 2,172}{34,95 \cdot 18,9 \cdot 72,43} = 0,605 \text{ cmt}$$

nach (17c)

Damit ist der Momentenverlauf am Hauptsystem festgelegt.

Die Verschiebung a_{0I} des Unterflansches in Punkt 5 wird nach (14)

$$\frac{2 G J_d}{h^2} a_{0I} = 20 - 0,605 \cdot 9,103 = 14,5.$$

Der Zustand $X = -1$ erzeugt am Hauptsystem ein äußeres Drehmoment $D_I = -18,9/2 \text{ cmt}$ mit $d_{kI} = -9,45 \text{ cmt}$ von $0 - 5$ und $d_{kI} = +9,45 \text{ cmt}$ von $5 - 10$. Die Flanschmomente infolge dieses Zustandes sind halb so groß wie in Beispiel 1.

Die Verschiebung des Unterflansches infolge D_I im Punkte 5 wird damit

$$\frac{2 G J_d}{h^2} \cdot a_{xI} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{200}{4} + \frac{23,52}{2} = -13,24.$$

Dies ist aber erst ein Anteil an der Ausbiegung infolge $X = -1$. Man vergegenwärtige sich, daß die Kraft $X = -1$ aus einem Kräftepaar $X = -1/2$ an Unterflansch und $X = +1/2$ an Oberflansch und aus zwei gleichgerichteten Kräften $X = -1/2$ an Unter- und Oberflansch zusammengesetzt werden kann. Die Ausbiegung des Unterflansches infolge des Kräftepaars $X = \pm 1/2 = a_{xI}$, die Ausbiegung des Unter- und Oberflansches infolge $X = -1/2$ ist

$$E J_F \cdot a_{xxI} = -\frac{25^2 \cdot 100 \cdot 2}{3} = -41700.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{2 G J_d}{h^2} \cdot a_{xI} &= -13,24 - \frac{41700}{E J_F} \cdot \frac{2 G J_d}{h^2} \\ &= -30,62, \end{aligned}$$

$$X = -\frac{14,5}{30,62} = -0,473 \text{ to.}$$

Der tatsächliche Verlauf der Flansch- und Torsionsmomente ist mit Hilfe von Tabelle 4 berechnet und in Abb. 14 aufgetragen.

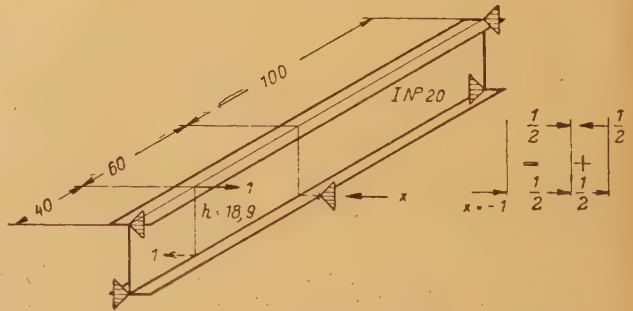


Abb. 13.

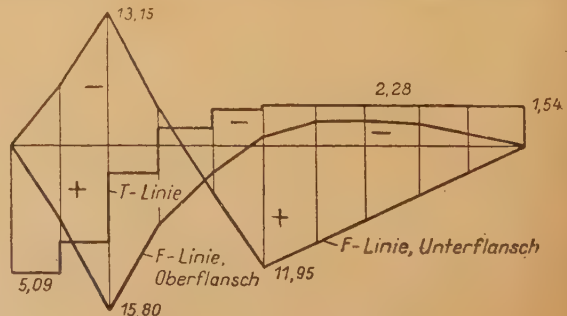


Abb. 14.

Tabelle 4

Punkt	F_k°	$F_k^I x$		$F_k = F_k^\circ - F_k^I x$		d_k°	$d_k^I x$	$d_k = d_k^\circ - d_k^I x$	$(F_{k+1} - F_k) \frac{a}{h}$	T_k
		Oberflansch	Unterflansch	Oberflansch	Unterflansch					
0	0	0	0	0	0	15,12	2,24	12,88	7,79	5,09
1	8,85	1,75	2,97	7,10	5,88	15,12	2,24	12,88	9,10	3,78
2	19,20	3,40	6,05	15,80	13,15	3,78	2,24	6,02	6,94	0,92
3	12,70	5,18	9,36	7,52	3,34	3,78	2,24	6,02	5,44	0,58
4	8,38	5,85	13,05	2,53	4,67	3,78	2,24	6,02	4,65	1,37
5	5,41	6,26	17,36	0,85	11,95	3,78	2,24	1,54	0,10	1,44
6	3,57	5,85	13,05	2,28	9,48	3,78	2,24	1,54	0	1,54
7	2,25	5,18	9,36	2,93	7,11	3,78	2,24	1,54	0	1,54
8	1,31	3,40	6,05	2,09	4,74	3,78	2,24	1,54	0	1,54
9	0,61	1,75	2,97	1,14	2,36	3,78	2,24	1,54	0	1,54
10	0	0	0	0	0	3,78				

5. Als letztes Beispiel sei der Kragträger mit eingespannten Flanschenden nach Abb. 15 durchgerechnet.

Profil I NP 20, $l = 200$ cm, $a = 20$ cm.

Die u_k -Werte können somit wieder der Tabelle 1 entnommen werden. $d_k = \text{const} = 18,9$. Den Wert F_1 erhält man aus der Bedingung, daß an der Einspannstelle der Flansche die Tangente an die Biegelinie gleich Null ist.

Es ist nach (15)

$$F_{10} = 72,43 F_1,$$

$$F_9 = 47,97 F_1 \text{ und nach (12)}$$

$$T_9 = 18,9 - \frac{24,46 \cdot 18,9}{20} F_1.$$

Der Neigungswinkel der Polygonstrecke 9—10 gegen die Horizontale wird nach (13)

$$\frac{z_9}{a} = \frac{18,9}{2 G J_d} \left(18,9 - \frac{24,46 \cdot 18,9}{20} F_1 \right).$$

Damit die Tangente Null wird, muß dieser Neigungswinkel ebenso groß sein wie der Verdrehungswinkel des Flansches n 10 infolge der Biegung des Abschnittes 9—10. Dieser Anteil ist bekanntlich

$$\frac{20 F_1}{6 E J_F} (2 \cdot 72,43 + 47,97).$$

Damit wird

$$\frac{E J_F}{G J_d} (53,6 - 65,5 F_1) = 192,83 F_1,$$

woraus

$$F_1 = 0,67 \text{ cmt}$$

$$F_{10} = 0,67 \cdot 72,43 = 48,5 \text{ cmt}.$$

Die Flansch- und Torsionsmomente sowie die Biegelinie des Flansches, die nach (13) leicht zu berechnen ist, sind in Abb. 16 aufgezeichnet.

b) Der Einfluß der Ausbiegung auf die Größe der Flansch- und Torsionsmomente

In den vorhergehenden Ausführungen beschränkte sich die Art der Belastung auf Drehmomente allein, welche durch horizontal in der Flanschebene angreifende Kräfte erzeugt werden. Lotrechte, in der Stegeebene wirkende Lasten bleiben dabei unberücksichtigt. Sie erzeugen in erster Linie nur Momente in der Stegeebene, die gesondert nach der üblichen Baustatik berechnet werden. Solange die Flansche sich in ihrer Ebene nicht wesentlich ausbiegen, ist die Berücksichtigung lotrechter Lasten bei der Ermittlung der Flanschmomente auch nicht erforderlich. Erst bei stärkeren Ausbiegungen ist das zusätzliche Dreh-

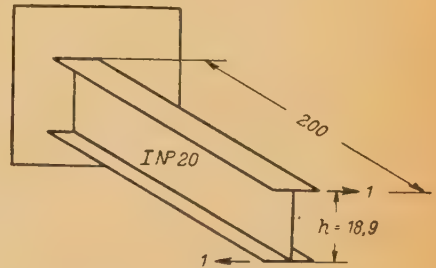


Abb. 15.

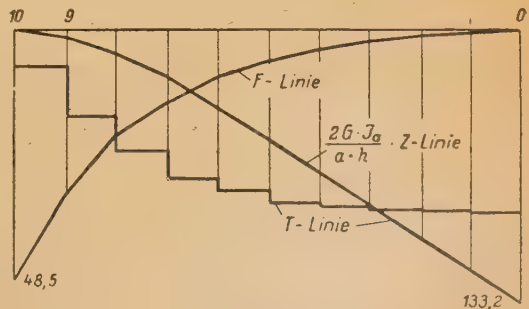


Abb. 16.

moment $P_k' \cdot z_k$ (vgl. Abb. 17), das die lotrechten Lasten in diesem Falle erzeugen, für die Zuverlässigkeit der Berechnung nicht mehr vernachlässigbar. Wo diese Grenze liegt, läßt sich meist von vornherein gar nicht feststellen. Es ist sogar durchaus möglich, daß in manchen Fällen die zusätzlichen Drehmomente einen so großen Ausschlag geben, daß in dem geplanten Tragwerk Materialbeanspruchung oder Durchbiegung die zulässigen Grenzen überschreiten. Für solche Untersuchungen ist im folgenden ein Weg gezeigt, der es ermöglicht, durch eine Zusatzberechnung den Einfluß der zusätzlichen Drehmomente abzuschätzen.

Am äußerlich statisch bestimmten Hauptsystem lassen sich analog zu (1) und (2) aus den Drehmomenten $P_k' \cdot z_k = D_{kz}$ Verdrehungsmomente d_{mz} berechnen, die im nächsten Rechnungsgang zusammen mit den aus den äußeren Drehmomenten $P_k \cdot h$ bewirkten d_m in die Anteile der Flanschbiegung und Torsion aufgespalten werden. Dies geschieht durch das Gleichungssystem (11), welches in diesem Fall die Form annimmt:

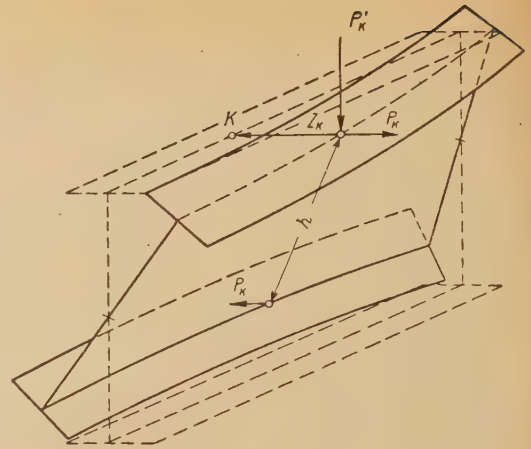


Abb. 17.

$$F_{m-1}(1-e) + F_m(4+2e) + F_{m+1}(1-e) = -(d_m - d_{m-1}) \frac{e a}{h} - (d_m + d_{m-1}) \frac{e a}{h} \dots \quad (11b)$$

Darin sind die Verdrehungsmomente d_{mz} wie gesagt von den Ausbiegungen z_k abhängig und zunächst noch unbekannt. Man kann nun den Momentenverlauf unter Vernachlässigung der Anteile $(d_{mz} - d_{m-1,z})$ nach (11) ausrechnen und mittels (14) den Verlauf der zugehörigen Ausbiegung bestimmen. Sodann bestimmt man die Drehmomente $P_k' \cdot z_k$ und daraus d_{mz} .

Diese Werte führt man dann in (11b) ein und berechnet den verbesserten Momentenverlauf. Nun kann man den verbesserten Biegungsverlauf feststellen und, je nachdem wie weit er von dem ohne Berücksichtigung von d_{mz} berechneten abweicht, noch einmal mittels (11b) die Momente verbessern. Bei der Verbesserung des Biegungsverlaufes ist allerdings Gl. (14) für die Beiträge d_m zu erweitern. Es ergibt sich in einfacher Weise

$$z = \frac{h^2}{2 G J_d} (M_{0m} + M_{0mz} - F_m), \quad (14a)$$

worin M_{0mz} den Biegungsverlauf des Flansches ohne Zusammenhang mit den Stegen infolge der in Flanchenebene wirkend zu denkenden Kräfte $P_k' \cdot z_k/h$ und F_m den in erster Näherung mittels (11b) verbesserten Momentenverlauf darstellt.

Für die Berechnung der Flanchmomente nach dem vereinfachten Verfahren bei Angriff nur eines äußeren Drehmomentes in s läßt sich F_1 und $\bar{F}_1$ (vgl. (17) und (18)) unmittelbar mit Berücksichtigung der Ausbiegung angeben.

Analog (17b, c) ist

$$F_1 = -(D_s + P_s' z_s) \frac{e a}{(1-e) h} \cdot \frac{u_{n-s}}{u_n} \quad (17d)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die horizontale und vertikale Last an der gleichen Stelle s des Trägers angreifen. Entsprechend (14a) ist

$$\frac{2 G J_d \cdot z_s}{h^2} = M_{0s} + M_{0sz} - F_s$$

Darin ist M_{0sz} in bekannter Weise $= \frac{P_s' z_s}{h} \cdot \frac{s(n-s) \cdot a}{n}$.

Setzt man diesen Wert und $F_s = F_1 u_s$ in die Gleichung (17d) ein, so erhält man eine Beziehung zur Bestimmung von z , nämlich

$$\frac{2 G J_d \cdot z_s}{h^2} = M_{0s} + P_s' \frac{a}{h} \cdot \frac{s \cdot (n-s) \cdot z_s}{n} + D_s \frac{e a}{(1-e) h} \cdot \frac{u_{n-s} \cdot u_s}{u_n} + P_s' \frac{a}{h} \cdot \frac{e}{1-e} \cdot \frac{u_{n-s} \cdot u_s}{u_n} \cdot z_s$$

oder

$$z = \frac{M_{0s} + D_s \frac{e a}{(1-e) h} \cdot \frac{u_{n-s} \cdot u_s}{u_n}}{\frac{2 G J_d}{h^2} - P_s' \frac{a}{h} \left\{ \frac{s(n-s)}{n} + \frac{e}{1-e} \cdot \frac{n \cdot u_{n-s} \cdot u_s}{u_n} \right\}} \quad (14b)$$

Setzt man (14b) in (17d) ein, so läßt sich der Momentenverlauf unmittelbar nach (15) angeben, und man hat bereits das endgültige Ergebnis ohne weitere Zwischenrechnung.

Bei allen Berechnungen dieser Art muß beachtet werden, daß das Superpositionsgesetz nicht mehr gültig ist. Ist beispielsweise der Träger durch mehrere äußere Drehmomente belastet, so wäre es falsch, die Zustände infolge der einzelnen Drehmomente getrennt nach (17b) und (14b) zu ermitteln und zum gesuchten Zustand zu superponieren. Vielmehr müßte die ganze Lastgruppe von vornherein in ihrer richtigen Lage und Größe berücksichtigt werden.

III. Der Balkenträger

Der Balkenträger ist hinsichtlich des Spiels der inneren Kräfte aufs engste mit dem geraden, durch Verdrehungsmomente belasteten Stab verwandt. Letzter ist ein Sonderfall des ersteren, und der wesentlichste Unterschied beruht darin, daß bereits bei lotrecht auf seine Ebene wirkenden Lasten der Balkenträger in seinen Querschnitten Verdrehungsmomente aufzunehmen hat. Die für den unter II) für den geraden Stab aufgestellten Überlegungen behalten grundsätzlich ihre Gültigkeit, und es wird lediglich in diesem Abschnitt versucht, die dort angewendeten und gewonnenen Begriffe und Methoden auf die Berechnung des Balkenträgers zu übertragen. Manches Problem wird dabei kürzer behandelt und, soweit sich grundsätzlich neue Folgerungen nicht ergeben, nur angedeutet. Die Berechnung ist wesentlich umfangreicher als beim geraden Stab, und zwar hauptsächlich dadurch, daß nahezu in allen, auch einfachen Fällen äußerlich statisch unbestimmte Lagerungen wenn nicht notwendig, so doch zweckmäßig sind, wobei noch nicht einmal ausschlaggebend ist, ob die Flansche an den Trägerenden eingespannt sind oder nicht. So wirken beispielsweise an dem einfachen Tragwerk nach Abb. 18 bereits bei gelenkig gelagerten Flanschenden 6 Auflagerkräfte d_A , d_B , m_A , m_B , A und B , zu deren Berechnung aber nur 3 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen.

Die Gesamtberechnung geht ebenso wie beim geraden Stab in drei Abschnitten vor sich: Grundsystem — Hauptsystem — äußerlich statisch unbestimmte Größen. Zu diesem Zweck wird das Tragwerk in endliche Abschnitte s_m unterteilt gedacht, wobei an den Abschnittsgrenzen die äußeren und inneren Kräfte wirken sollen. Man kann rascher rechnen, wenn man die Einteilung der Abschnitte nach Möglichkeit so vornimmt, daß eine regelmäßige Teilung entsteht, und wählt hierzu möglichst einen Polygonzug, dessen Seiten alle gleich sind, also nach Abb. 18 $s_m = s$. Bei der weiteren Entwicklung wird dies, ebenso konstanter Querschnitt, vorausgesetzt.

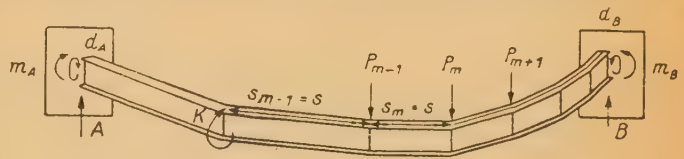


Abb. 18.

Die Ermittlung der statisch Unbestimmten des Grundsystems kann als bekannt vorausgesetzt werden. In Verfolg einer Vereinheitlichung der Berechnungsweise wird hier für die Berechnung von Formänderungen auf die unter IIIc (35, 36) entwickelten Gleichungen zur Bestimmung von Ausbiegungen infolge von Torsionsmomenten hingewiesen, die auch für das Grundsystem anwendbar sind, wenn nur an Stelle von T , die im Grundsystem wirkenden, den jeweiligen Belastungs- und Lagerungsfällen zugehörigen inneren Verdrehungsmomente D_r eingeführt werden.

a) Die Beziehungen am Grundsystem

Für die Verdrehungsmomente des Grundsystems gilt im übrigen nach Abb. 19

Die Ermittlung der statisch Unbestimmten des Grundsystems kann als bekannt vorausgesetzt werden. In Verfolg einer Vereinheitlichung der Berechnungsweise wird hier für die Berechnung von Formänderungen auf die unter IIIc (35, 36) entwickelten Gleichungen zur Bestimmung von Ausbiegungen infolge von Torsionsmomenten hingewiesen, die auch für das Grundsystem anwendbar sind, wenn nur an Stelle von T , die im Grundsystem wirkenden, den jeweiligen Belastungs- und Lagerungsfällen zugehörigen inneren Verdrehungsmomente D_r eingeführt werden.

Für die Verdrehungsmomente des Grundsystems gilt im übrigen nach Abb. 19

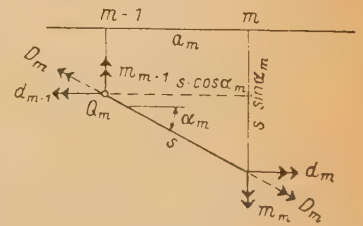


Abb. 19.

$$d_m = d_{m-1} - Q_m \cdot s \cdot \sin \alpha_m, \quad \dots \dots \dots (24)$$

$$m_m = m_{m-1} + Q_m \cdot s \cdot \cos \alpha_m, \quad \dots \dots \dots (25)$$

wobei Q_m nach oben gerichtet angenommen ist.

Außerdem erkennt man leicht, daß die in Stabrichtung wirkende Resultierende D_m aus d und m über die Stablänge s konstant verläuft, da Q_m in dieser Richtung kein Drehmoment erzeugt. Es ist

$$D_m = d_{m-1} \cos \alpha_m + m_{m-1} \sin \alpha_m = d_m \cos \alpha_m + m_m \sin \alpha_m. \quad \dots \dots \dots (26)$$

Die äußere Belastung kann dabei sowohl durch lotrechte Kräfte P , wie auch durch Verdrehungsmomente K gegeben sein.

b) Die Berechnung des Hauptsystems

In Abb. 20 sind die an den Enden zweier aufeinanderfolgenden Polygonseiten $m-1$, m und m , $m+1$ wirkenden inneren Kräfte eingetragen. Die Momente d_m , m_m und ihre Komponente M_m ergeben sich aus dem Grundsystem und sind für die weitere Entwicklung als bekannt vorauszusetzen.

Aus der Bedingung des Gleichgewichtes der Momente um die Achse des Stabes $m-1$, m am Ende m errechnet sich unter Berücksichtigung von (26)

$$T_m = D_m - V_m \cdot h \dots (27)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung gegen Ausdrehen des Flansches $m-1$, m um m ergibt sich

$$V_m = \frac{F_m - F_{m-1}}{s}, \dots (28)$$

woraus mittels (27)

$$T_m = D_m - \frac{h}{s} (F_m - F_{m-1}) \dots (29)$$

wird.

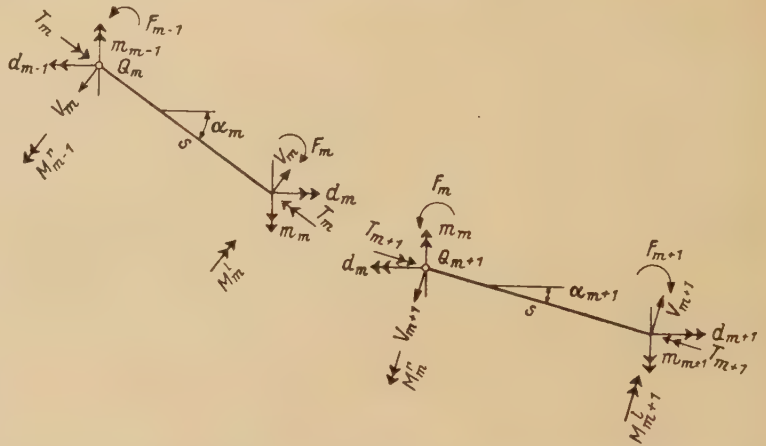


Abb. 20.

Zur Gewinnung weiterer Beziehungen aus den Formänderungen sind die horizontalen Auslenkungen der Polygonpunkte in Abb. 21 dargestellt, und zwar nach den Richtungen des gewählten Koordinatensystems. Hiernach steht aus der Forderung der Kontinuität des Biegungsverlaufes im Punkt m wieder die Beziehung zur Verfügung:

$$\frac{z_m - z_{m-1}}{\cos \alpha_m} - \frac{z_{m+1} - z_m}{\cos \alpha_{m+1}} = \frac{s}{6 E J_F} (F_{m-1} + 4 F_m + F_{m+1}) \dots (30)$$

Nach Abb. 22 wird der Flansch im Punkte m gegen den Punkt $m-1$ senkrecht zur Stabachse um den Betrag $(z_m - z_{m-1}) \cos \alpha_m - (v_m - v_{m-1}) \sin \alpha_m$ ausgedreht. Dadurch wird ein Torsionsmoment T_m erzeugt von der Größe [vgl. (8a, b)]

$$T_m = \frac{2 G J_d}{h \cdot s} \{ \cos \alpha_m (z_m - z_{m-1}) - \sin \alpha_m (v_m - v_{m-1}) \} \dots (31)$$

Gleichzeitig erfährt der Flansch auf der Strecke $m-1$, m eine Längenänderung vom Betrag (vgl. Abb. 22) $(z_m - z_{m-1}) \sin \alpha_m + (v_m - v_{m-1}) \cos \alpha_m$, der aus der Formänderungsarbeit der Momente M_{m-1}^r , M_m^l entsteht und von der Größe $\frac{M_{m-1}^r + M_m^l}{4 E J} \cdot h \cdot s$ ist. Daraus ergibt sich eine ähnliche Gleichung wie (31), nämlich

$$\frac{M_{m-1}^r + M_m^l}{4 E J} \cdot h \cdot s = \sin \alpha_m (z_m - z_{m-1}) + \cos \alpha_m (v_m - v_{m-1}) \dots (32)$$

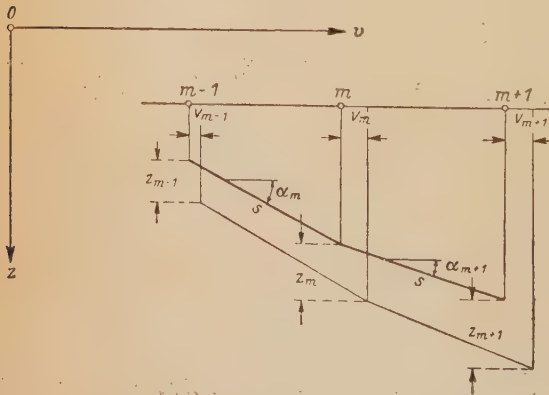


Abb. 21.

Bringt man den Faktor vor der geschweiften Klammer in (31) auf die linke Seite und multipliziert Gl. (32) mit $\sin \alpha_m$ und Gl. (31) mit $\cos \alpha_m$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & (\sin^2 \alpha_m + \cos^2 \alpha_m) (z_m - z_{m-1}) \\ &= \frac{M_{m-1}^r + M_m^l}{4 E J} \cdot h \cdot s \cdot \sin \alpha_m \\ &+ \frac{T_m}{2 G J_d} \cdot h \cdot s \cdot \cos \alpha_m. \end{aligned}$$

Der Beitrag der Momente $(M_{m-1}^r + M_m^l)$ ist nachgewiesenermaßen vernachlässigbar klein (vgl. Stüssi⁷⁾), so daß geschrieben werden kann

$$\frac{T_m \cdot h}{2 G J_d} = \frac{z_m - z_{m-1}}{s \cdot \cos \alpha_m} \dots (33)$$

⁷⁾ dort S. 5 des Sonderdruckes der Abhandlung.

Mittels (29) wird daraus, wenn die Differenzen $\frac{(z_m - z_{m-1})}{s \cdot \cos \alpha_m}$ für zwei benachbarte Polygonseiten gebildet werden:

$$\frac{z_m - z_{m-1}}{s \cdot \cos \alpha_m} - \frac{z_{m+1} - z_m}{s \cdot \cos \alpha_{m+1}} = \frac{h}{2 G J_d} \left\{ D_m - D_{m+1} - \frac{h}{s} (-F_{m-1} + 2 F_m - F_{m+1}) \right\}.$$

Führt man für die linke Seite die rechte Seite der Gl. (30) ein, so erhält man mit

$$e = \frac{3 h^2}{s^2} \cdot \frac{E J_F}{G J_d}$$

das Gleichungssystem

$$F_{m-1} (1 - e) + F_m (4 + 2 e) + F_{m+1} (1 - e) = \frac{e s}{h} (D_m - D_{m+1}). \dots \dots \dots (34)$$

Für den Fall, daß aus Gründen der Formgebung die Polygonseiten nicht gleichgemacht werden können, oder wenigstens für die Rechnung annähernd gleich angenommen werden können, bringt die Ableitung des dreigliedrigen Gleichungssystems (34) keine neuen Schwierigkeiten, weshalb es sich erübrigt, darauf näher einzugehen. Ein verkürztes Verfahren im Sinne des ersten Abschnittes ist hier nicht möglich, da im Grundsystem in jedem Punkte eine Differenz ($D_m - D_{m+1}$) vorhanden ist, so daß keine der Gleichungen (34) homogen sein kann.

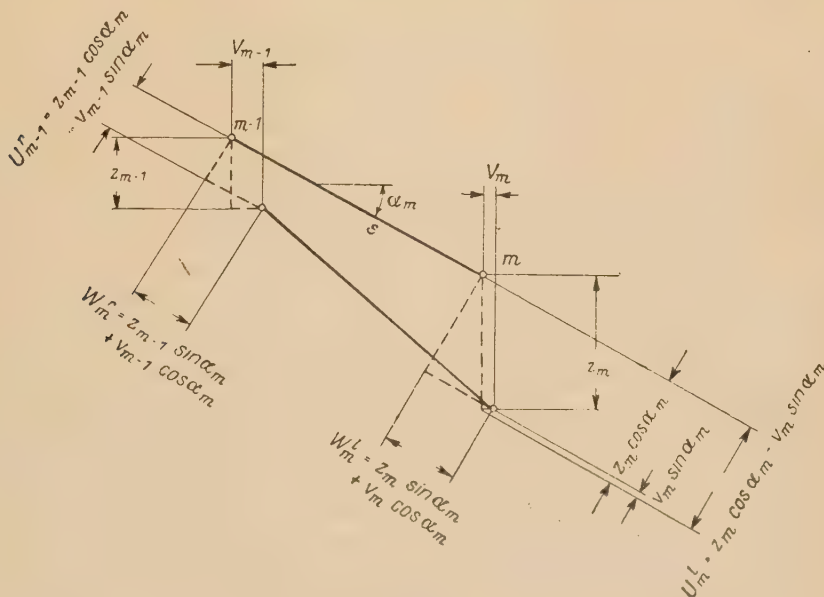


Abb. 22.

c) Die Berechnung der Verformungen

Während beim geraden Stab zufolge der Wirkung der vorliegenden Belastungen vorwiegend nur horizontale Ausbiegungen erzeugt werden, entstehen beim Balkonträger auch zusätzliche vertikale Verformungen, deren Größe für die Bemessung des Tragwerkes oft eine entscheidende Rolle spielt. Es werden hierzu im folgenden Formeln zur Berechnung der horizontalen und vertikalen Ausbiegungen aufgestellt, die auf die Summenbildung von Funktionen, die sich für T_m aus (33) ergeben, aufgebaut sind.

Die horizontale Ausbiegung in Richtung z wird mittels (33) unmittelbar

$$z_m = \frac{s h}{2 G J_d} \cdot \sum_1^m T_r \cos \alpha_r + z_0 \dots \dots \dots (35)$$

und in Richtung v nach (31), wenn für $z_m - z_{m-1}$ der Ausdruck (33) eingeführt wird

$$v_m = - \frac{s h}{2 G J_d} \sum_1^m T_r \sin \alpha_r + v_0 \dots \dots \dots (36)$$

Es ist hierbei berücksichtigt, daß die Lagerung an den Rändern so gestaltet ist, daß Querschnittsverdrehungen um die Achsen v und z möglich sind. Die Auslenkungen z_0 und v_0 sind leicht zu bestimmen aus der Forderung, daß die Summe aller Auslenkungen von 1 bis $n-1$ gleich sein muß der Summe $z_0 + z_n$ bzw. $v_0 + v_n$. Senkrecht zur Polygonseite $m-1, m$ sind die horizontalen Ausbiegungen entsprechend Abb. 22:

$$u_m = \frac{s h}{2 G J_d} \left(\cos \alpha_m \sum_1^m T_r \cos \alpha_r + \sin \alpha_m \sum_1^m T_r \sin \alpha_r + z_0 \cos \alpha_r + v_0 \sin \alpha_r \right)$$

und

$$w_m = \frac{s h}{2 G J_d} \left(\sin \alpha_m \sum_1^m T_r \cos \alpha_r - \cos \alpha_m \sum_1^m T_r \sin \alpha_r + z_0 \sin \alpha_r - v_0 \cos \alpha_r \right).$$

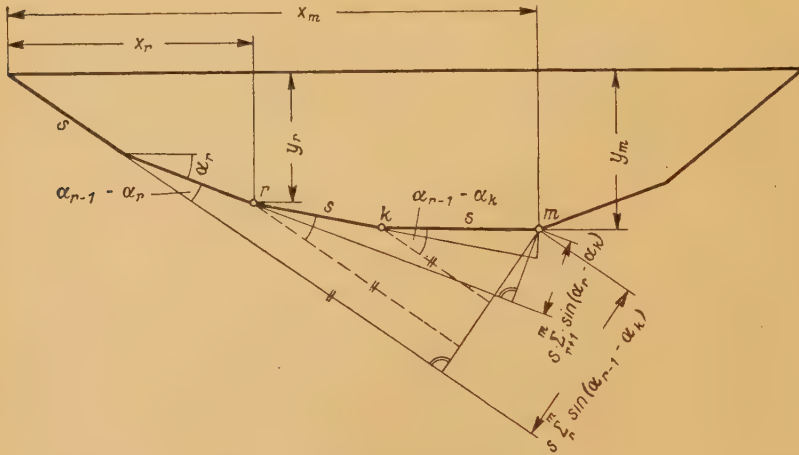


Abb. 23.

Die vertikale Durchbiegung δ des Tragwerkes setzt sich zusammen aus einem Anteil der Verdrehung und einem Anteil der Flanschdehnungen infolge der Momente M_m .

Der Anteil der Verdrehung summiert sich aus der Verdrehung der einzelnen Polygonseiten, wobei die lotrechte Durchbiegung in m infolge der Verdrehung des Endpunktes r einer Polygonseite $r-1, r$ das Produkt aus dem Verdrehungswinkel dieser Seite mit dem zur Polygonseite senkrechten Abstand von m darstellt (vgl. Abb. 23). Damit wird

$$\delta_m = \frac{s^2}{G J_d} \sum_1^m T_r \left\{ \sum_{r+1}^m \sin (\alpha_r - \alpha_k) \right\}.$$

Nach einiger Umformung ergibt sich daraus im Sinne der Beziehungen in Abb. 23

$$\delta_m = \frac{s}{G J_d} \sum_1^m T_r \{ \sin \alpha_r (x_m - x_r) - \cos \alpha_r (y_m - y_r) \}. \quad 24)$$

Der Anteil der Durchbiegung aus der Flanschdehnung ist demgegenüber meist vernachlässigbar klein. Um ihn dennoch rasch näherungsweise zu berechnen, könnte man folgendermaßen vorgehen: Die linke Seite der Gl. (32) gibt die Flanschverkürzung bzw. Verlängerung an, und wenn man diesen Betrag durch $h/2$ dividiert, so hat man näherungsweise den Winkel, um den sich die Polygonseite senkrecht zur Trägerebene gegenüber der vorhergehend anschließenden Seite aufgedreht hat. Die Summe dieser Winkel von $0-m$, multipliziert mit der Seitenlänge ergibt dann die senkrechte Durchbiegung, wobei allerdings die Verdrehung der Seite $0-1$ aus der Trägerebene noch unbekannt bleibt. Man könnte zunächst für den Winkel $0-1$ den Wert einsetzen, der sich aus der Flanschdehnung der Seite $0-1$ ergibt und würde dann bei Summierung über den Anteil aller Seiten im Endpunkt zu einer Durchbiegung δ_n gelangen, die beispielsweise bei festgehaltenem Endpunkt nicht entstehen könnte. Um zu dem richtigen Ergebnis zu kommen, müßte man sodann die Trägerebene gegenüber 0 um den Winkel δ_n/l geschwenkt denken und würde die wahren Senkungen aus den Differenzen zwischen den Ordinaten der errechneten Biegelinie und der neuen Trägerebene erhalten.

Die in obigem behandelten Verformungen können natürlich ebenso nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebung unter Anwendung des Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und des Reduktionssatzes berechnet werden. Man gelangt dabei zu den bekannten Integralen nach Abschnitt IIc, wobei jedoch hier noch zusätzlich ein Anteil der Momente M hinzukommt.

Beide Möglichkeiten zur Berechnung der Durchbiegungen und Verformungen sind auch für die Ermittlung der äußerlich statisch unbestimmten Größe anwendbar. Auf welche Weise man allerdings rascher und bequemer zum Ziel kommt, muß fallweise geprüft werden. Im allgemeinen erscheint es günstiger, die Summen-

formeln zu benützen, da sie tabellarisch rasch und übersichtlich durchzurechnen sind und – was der besondere Vorteil ist – da bei ihrer Anwendung nicht erst der Zustand der inneren Kräfte für eine virtuelle Belastung durchgerechnet werden muß.

Der Gang der Berechnung bei statisch unbestimmten Lagerungen ist ähnlich, wie in Abschnitt IIc aufgezeigt worden ist, so daß es sich erübrigt, hierauf nochmals näher einzugehen.

d) Einflußlinien

Zum Schluß seien noch einige Hinweise auf die Berechnung der Einflußlinien gegeben. Hier kommen wiederum die allgemeinen Lehrsätze der Baustatik zur Anwendung.

Nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen kann gesagt werden

1. das in r mit Richtung $a-b$ wirkende äußere Drehmoment $1 \cdot h$ erzeugt in s mit Richtung $c-d$ eine horizontale Auslenkung, die ebenso groß ist wie diejenige in r mit Richtung $a-b$, hervorgerufen durch das äußere Drehmoment $1 \cdot h$ in s mit Richtung $c-d$.
2. Die lotrechte Kraft $P = 1$ in r erzeugt in s mit Richtung $c-d$ eine horizontale Auslenkung, die ebenso groß ist wie die lotrechte Verschiebung des Punktes r , hervorgerufen durch das äußere Drehmoment $1 \cdot h$ in s mit Richtung $c-d$.

Daraus ergibt sich, daß die Einflußlinie für die horizontale Auslenkung des Flansches in r unter der Wirkung lotrechter Lasten gleich ist der vertikalen Biegelinie und unter der Wirkung äußerer Drehmomente gleich ist der horizontalen Biegelinie des Trägers infolge des Drehmomentes $P \cdot h = 1 \cdot h$ in r .

Weiterhin ist die Einflußlinie für das Flanschmodent im Punkte r gleich der Biegelinie des Trägers für den Fall, daß in der in r geschnitten gedachte Flansch an den Rändern der Schnittstelle derart durch ein Momentenpaar $\pm F_r$ (entsprechend Ober- und Unterflansch) beansprucht wird, daß die Querschnitte in r sich um den Winkel 1 gegenseitig verdrehen. Die horizontale Biegelinie entspricht für diesen Fall der Einflußlinie für das Moment in r infolge äußerer Verdrehungsmomente, die vertikale Biegelinie dagegen der Einflußlinie infolge lotrechter Lasten.

Die Berechnung der Einflußlinien als Biegelinien macht grundsätzlich keine Schwierigkeiten; sie ist in ihren Möglichkeiten im Vorhergehenden umrissen worden. Es wurde dabei vermieden, zu sehr in Einzelheiten und Verfeinerungen vorzudringen. Jeder Fall bietet ein anderes Bild, sei es hinsichtlich Belastung, Form oder Randbedingungen, und jeder Fall muß auf die für ihn angezeigt erscheinende Weise behandelt werden. So hat die vorangehende Entwicklung lediglich richtungsweisenden Charakter und läßt noch manche Möglichkeit, die zur Vereinfachung ausnützbare wäre, offen.

e) Zahlenbeispiel

An Hand eines Beispiels wurde die Zahlenrechnung für das vorliegende Verfahren und dasjenige von Stüssi durchgeführt. Hierzu wurde ein Halbkreisbogen mit dem Radius $r = 500$ cm, bestehend aus I P 40 gewählt unter Belastung mit $P = 1$ to in Trägermitte. Von den drei möglichen Fällen der Flanschlagerung wurden zwei untersucht, nämlich

1. Entsprechend Abb. 24 Verschieblichkeit der Flansche in 0 um die durch 0 gehenden, zu $x-x$ parallelen Achsen. Statisch bestimmte Lagerung $d_0 = 0$; $m_0 \neq 0$.
2. Entsprechend Abb. 25 auch in den zu $x-x$ parallelen, durch 0 gehenden Achsen gelenkige Festhaltung der Flanschenden. Lagerung einfach statisch unbestimmt. $d_0 \neq 0$; $m_0 = 0$.

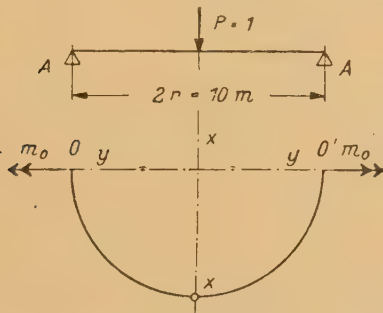


Abb. 24.

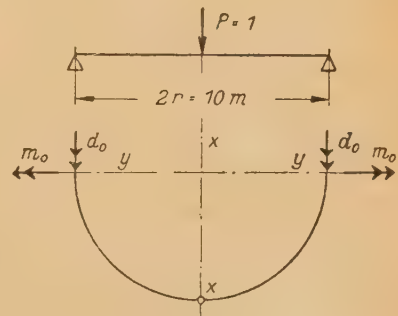


Abb. 25.

In beiden Fällen wurde die Symmetrie der Tragwerksform und der Belastung ausgenützt. Das vorstehend beschriebene Verfahren wurde für eine Einteilung des Bogens in 8 und 12 gleiche Abschnitte durchgeführt.

Die Berechnung nach Stüssi erfolgte mit 15° Winkelteilung, entsprechend ebenfalls 12 Abschnitten. Beide Rechnungsarten sind in Tabelle 5 nebeneinander gezeigt. Für die Lagerung nach 2. wurde auch bei Berechnung nach Stüssi das Grundsystem entgegen dem Aufbau seines Verfahrens der Einfachheit wegen als statisch unbestimmt gewählt.

Die ermittelten Flanshmomente sind in der Abb. 26 entsprechend Lagerung 1. und Abb. 27 entsprechend Lagerung 2. aufgetragen. Die Übereinstimmung der Ergebnisse nach beiden Verfahren ist recht gut. Die Berechnung nach dem in vorliegender Arbeit entwickelten Verfahren geht einfacher vor sich als bei Stüssi, einmal, weil gewisse Lagerungsbedingungen der Flanschen schon im Grundsystem berücksichtigt werden, zum anderen, weil die rechte Seite des Gleichungssystems einfacher aufgebaut ist und nicht erst die Berechnung in Stegachse wirkender Momente voraussetzt. Nach Unold (vgl. Fußnote 2, dort S. 76 Abb. 75 und S. 77, Abb. 77) wurde vergleichsweise errechnet für das Mittelmoment:

Lagerung nach 1. $F_0 = 1,900$

Lagerung nach 2. $F_0 = 0,935$.

Das Abfallen der Werte nach Unold gegenüber den beiden anderen ist nicht ganz verständlich, da die dort gewählte Unterteilung ausreichend für die Annäherung des genauen Ergebnisses ist. Der Unterschied zwischen den Flanshmomenten bei Unterteilung in 8 und 12 Abschnitte ist gering gegenüber den Differenzen mit den Unold'schen Werten. Möglicherweise sind die von Unold angegebenen Formeln nur angenähert. Der Verfasser ging auf eine diesbezügliche Untersuchung nicht ein.

Das vorstehende Beispiel befaßt sich mit der angenäherten Berechnung des Kreisbogens, wobei dieser nach dem Verfahren des Verfassers durch einen Polygonzug zu ersetzen ist. Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, daß das Verfahren exakt ist, wenn die Bogenform tatsächlich als ein Vieleck ausgebildet ist und an Stelle der stetigen Krümmung Ecken aufweist.

IV. Schlußwort

Die vorliegende Arbeit stellt den Versuch dar, die Berechnung von Verdrehungsproblemen am T-Träger für allgemeine Belastungen und

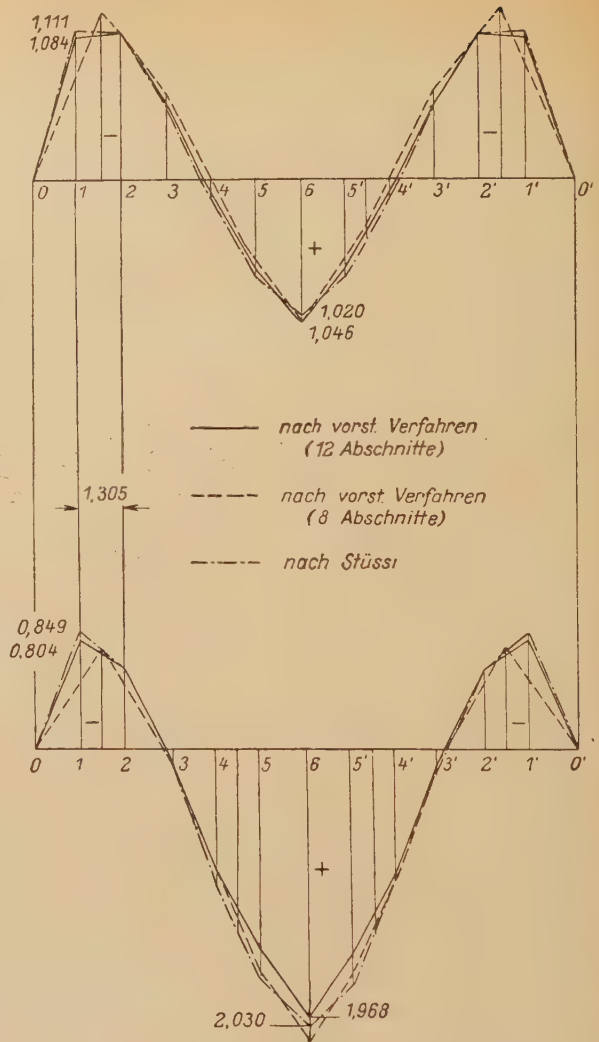


Abb. 26 und 27.

Tabelle 5

Vorliegendes Verfahren

Verfahren Stüssi

Punkt	y	α	Δy	$\Delta \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
1	1,214	5,000	1,294	0,180	0,993	0,138
2	2,500	4,820	1,206	0,490	0,925	0,375
3	3,530	4,330	1,030	0,800	0,789	0,613
4	4,330	3,530	0,800	1,030	0,613	0,789
5	4,820	2,500	0,490	1,206	0,375	0,925
6	5,000	1,214	0,180	1,294	0,138	0,993

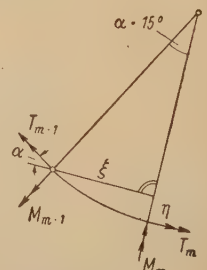
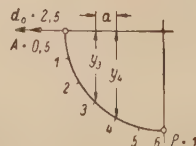
$$\Delta \varphi = 15^\circ \cong 0,262 = \frac{\pi}{12} = \alpha$$

$$\sin \alpha \cong 0,259$$

$$\cos \alpha \cong 0,966$$

$$\xi = 1,295$$

$$\eta = 0,17$$



$$\text{Nach } \begin{aligned} M_m &= M_{m-1} \cos \alpha - T_{m-1} \sin \alpha + Q_{m-1} \xi \\ T_m &= T_{m-1} \cos \alpha + M_{m-1} \sin \alpha + Q_{m-1} \eta \end{aligned}$$

Tabelle 5 (Fortsetzung)

Lagerungsfall 1

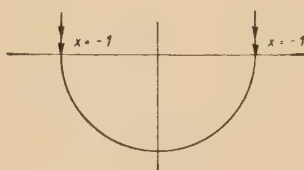
Punkt	d_m°	m_m°	D_m° nach (26)	D_m° $- D_{m+1}^\circ$
0	2,500	0		
1	1,850	0,090	$0,255 + 0,089 = 0,344$	$-0,435$
2	1,250	0,335	$0,469 + 0,310 = 0,779$	$-0,152$
3	0,735	0,735	$0,451 + 0,580 = 1,031$	$-0,000$
4	0,335	1,250	$0,264 + 0,966 = 1,030$	$+0,254$
5	0,090	1,850	$0,083 + 0,693 = 0,776$	$+0,231$
6	0,000	2,500	$+0,345 = 0,345$	$+0,690$

Lagerungsfall 1

Punkt	M°	T°	M_{m-1}° $+ 4 M_m^\circ$ $+ M_{m+1}^\circ$
0	2,500	0,000	
1	1,760	0,560	10,45
2	0,905	0,910	5,380
3	0,000	1,034	0
4	$-0,905$	0,910	$-5,380$
5	$-1,760$	0,560	$-10,45$
6	$-2,500$	0,000	$-13,520$

Ausbiegung v_0 in 0 nach (36) $2,867 \cdot \frac{2G \cdot Jd}{s \cdot h}$

Punkt	m_m'	D_m' nach (26)
0	1,000	
1	1,000	0,993
2	1,000	0,925
3	1,000	0,781
4	1,000	0,613
5	1,000	0,375
6	1,000	0,138

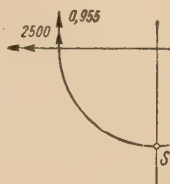


Punkt	M'	T'
0	0	1,000
1	$-0,259$	0,966
2	$-0,500$	0,865
3	$-0,707$	0,706
4	$-0,866$	0,499
5	$-0,956$	0,256
6	$-1,000$	0

Ausbiegung v_0 in 0 nach (36) $3,003 \cdot \frac{2G \cdot Jd}{s \cdot h}$

Lagerungsfall 2

$$x = \frac{2,867}{3,002} = 0,955$$



Lagerungsfall 2

$$a_{11} = \frac{1}{G \cdot J_d} \int T' T' ds = \frac{1}{3 G \cdot J_d} \cdot 8,898$$

$$a_{01} = \frac{1}{G \cdot J_d} \int T^\circ T' ds = \frac{1}{3 G \cdot J_d} \cdot 7,899$$

$$x = \frac{7,899}{8,898} = 0,89$$

Punkt	$D_m = D_m^\circ - D_m' x$	$D_m - D_{m+1}$
0		
1	$0,344 - 0,948 = -0,604$	$-0,509$
2	$0,779 - 0,874 = -0,095$	$-0,372$
3	$1,031 - 0,754 = +0,277$	$-0,167$
4	$1,030 - 0,586 = +0,444$	$+0,027$
5	$0,776 - 0,359 = +0,417$	$+0,204$
6	$0,345 - 0,132 = +0,213$	$+0,426$

Punkt	$M = M^\circ - M' x$	$M_{m-1} + 4 M_m$ $+ M_{m+1}$
0	$2,500 + = 2,500$	
1	$1,760 + 0,230 = 1,990$	11,81
2	$0,905 + 0,445 = 1,350$	8,02
3	$0,000 + 0,628 = 0,628$	3,72
4	$-0,905 + 0,770 = -0,135$	$-0,81$
5	$-1,760 + 0,858 = -0,902$	$-5,35$
6	$-2,500 + 0,890 = -1,610$	$-8,24$

Das Gleichungssystem

$$s = 1,305; h = 0,374; J_d/J_f = 0,0845; G/J_d = 0,385$$

$$e = 7,56; 1 - e = -6,56; 4 + 2e = 19,12$$

$$\frac{e_s}{h} = 26,4; \frac{1-e}{e_s/h} = -0,247; \frac{4+2e}{e_s/h} = 0,722$$

$$\text{Gl. (34)} \quad \text{Lag. } F_2 \quad \text{Lag. } F_1$$

$$-0,722 F_1 - 0,247 F_2 = -0,509 \text{ bzw. } -0,435$$

$$-0,247 F_1 + 0,722 F_2 - 0,247 F_3 = -0,372 - 0,152$$

$$-0,247 F_2 + 0,722 F_3$$

$$-0,247 F_4 = -0,167 \quad 0$$

Das Gleichungssystem

$$\bar{e} = 7,61; \frac{r}{h} \cdot \frac{e}{6} \Delta \varphi^2 = 1,155$$

Vgl. IV: Schlußwort.

$$\text{Lag. } F_2 \quad \text{Lag. } F_1$$

$$-16,22 F_1 - 5,72 F_2 = 11,81 \quad 10,43$$

$$5,72 F_1 + 16,22 F_2 - 5,72 F_3 = 8,02 \quad 5,38$$

$$- \quad - \quad - = 3,72 \quad 0$$

Tragwerksformen weitgehendst mit den Mitteln der gewöhnlichen Baustatik durchzuführen. Die gedanklichen Voraussetzungen hierzu wurden zum Teil aus einer Arbeit von Stüssi übernommen. Es ergeben sich sehr vereinfachende Zusammenhänge, denen vor allem bei der Berechnung des geraden Stabes Bedeutung zukommt.

Die Berechnung der inneren Kräfte des Hauptsystems erfolgt mittels Auflösung eines dreigliedrigen Gleichungssystems. Es wäre ebenso denkbar, die Kräfte und Verformungen am Hauptsystem und weiterhin die zur Berechnung der äußerlich statisch Unbestimmten erforderlichen Formänderungsgrößen mit den Differentialgleichungen nach Unold zu ermitteln. Die Randbedingungen wären dann in getrennten Rechnungen für die einzelnen Unbestimmten nach Abschnitt IIc zu bestimmen. Allerdings bleibt diese Möglichkeit im allgemeinen beschränkt auf konstantes Trägheitsmoment sowie auf gerade oder Kreisform.

Zum Vergleich sei noch die Form des Gleichungssystems bei Stüssi ⁸⁾ angegeben:

$$F_{m-1}(1 - \bar{e}) + F_m(4 + 2\bar{e}) + F_{m+1}(1 - \bar{e}) = \frac{r}{h} \cdot \frac{e}{6} \Delta\varphi^2 (M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1}).$$

Darin st

$$\bar{e} = \frac{3EJ_F}{GJ_d} \cdot \frac{h^2}{(r\Delta\varphi)^2}, \quad r = \text{Krümmungsradius, } \Delta\varphi = \text{Teilungswinkel des Bogens zum Kreismittelpunkt,}$$

M = Biegemoment auf die Stabachse.

Mit $r \cdot \Delta\varphi = s$ geht die linke Gleichungsseite in die Form der Gl. (34) über. Die rechte Seite ist allerdings auf andere Schnittgrößen des Nullsystems aufgebaut.

Ein ähnliches Gleichungssystem gibt Stüssi auch noch zur unmittelbaren Berechnung der Torsionsmomente an.

⁸⁾ dort Formel (14).

Die Berechnung kreisförmiger zentralsymmetrischer Fundamentplatten nach dem Differenzenverfahren

Von Prof. Dr.-Ing. Günter Worch, München

1. Einführung

Eine Kreisplatte von gleichbleibender Dicke sei zentralsymmetrisch ausgebildet und belastet. Als Bezugs-unbekannte wird die Durchbiegung w der Plattenmittelfläche gewählt. Sind für die Platte die Kirchhoff-schen Voraussetzungen erfüllt, dann lautet die Bestimmungsgleichung für die unbekannte Durchbiegung

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D} \quad (1)$$

Hierin bedeuten

p die Belastung je Flächeneinheit (kg/cm^2)

h die Plattendicke (cm)

E das Elastizitätsmaß des Baustoffes (kg/cm^2)

μ die Querdehnungszahl des Baustoffes

$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}$ die Plattensteifigkeit ($\frac{\text{kg cm}^2}{\text{cm}}$).

Der Laplacesche Operator – in Polarkoordinaten r, α – vereinfacht sich bei Zentralsymmetrie zu

$$\Delta w = w'' + \frac{1}{r} w', \quad (2)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$(\dots)' = \frac{d}{dr} (\dots); \quad (\dots)'' = \frac{d^2}{dr^2} (\dots) \quad \text{usw.}$$

Die beiden Δ -Zeichen in (1) besagen, daß die Operation Δ laut (2) zweimal nacheinander auszuführen ist. In ausgeschriebener Form beträgt somit

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = w^{IV} + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w'. \quad (3)$$

Sind die Durchbiegungen w bekannt, dann ergeben sich die Biegemomente zu:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } M_r &= -D \left(w'' + \frac{\mu}{r} w' \right) = -D \left(\Delta w - \frac{1 - \mu}{r} w' \right) \\ \text{b) } M_t &= -D \left(\mu w'' + \frac{1}{r} w' \right) = -D \left(\mu \Delta w + \frac{1 - \mu}{r} w' \right) \\ \text{c) } M_r + M_t &= -D (1 + \mu) \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Betrachtung der Momentensumme ermöglicht eine Spaltung der Plattengleichung (1). Führt man zur Abkürzung

$$M = \frac{1}{1 + \mu} (M_r + M_t) \quad (5)$$

ein und setzt darin die Momentensumme nach (4c) ein, so erhält man

$$\Delta w = -\frac{M}{D} \quad (6)$$

Die Plattengleichung (1) geht damit über in

$$\Delta M = -p \quad (7)$$

Die Querkraft können wir auf zwei Arten ausdrücken. Bezeichnet V_r die Resultierende sämtlicher an einem Plattenteil vom Halbmesser r angreifenden äußeren Kräfte, so liefert die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in lotrechter Richtung

$$Q_r = -\frac{V_r}{2r\pi} \quad (8)$$

Als Funktion von w bzw. M ist

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \Delta w = M' \quad (9)$$

Von Interesse ist schließlich der Neigungswinkel φ , den die Tangente an die Biegelinie mit der Waage-rechten bildet; er beträgt

$$\varphi = -w' \quad (10)$$

Ist die Belastung p der Platte gegeben, so ist die Lösung der Plattengleichung mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln möglich. Wesentlich schwieriger wird die Rechnung bei Fundamentplatten, bei denen außer der bekannten Auflast p noch der unbekannte Gegendruck q des Baugrundes auftritt; an die Stelle von p tritt hier der Wert $p - q$. Die Größe der Bodenpressung q hängt von den Eigenschaften des Baugrundes sowie von denen des Fundamentes ab. Die Klärung dieser Zusammenhänge ist eine Aufgabe der Bodenmechanik. Für praktische Berechnungen behilft man sich in der Regel mit dem Ansatz von Winkler und Schwedler, die eine Proportionalität von Bodenpressung und Einsenkung vorschlagen

$$q = K w, \quad (11)$$

worin K die Baugrundziffer (kg/cm^3) darstellt.
Die Plattengleichung (1) geht damit über in

$$\Delta \Delta w + \frac{K}{D} w = \frac{p}{D} \quad (12)$$

oder aufgespalten laut (6) bzw. (7)

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \Delta w = -\frac{M}{D} \\ \text{b) } \Delta M = K w - p \end{array} \right\} \quad (13)$$

Die strenge Lösung der Differentialgleichung (12) bzw. (13) führt auf Zylinderfunktionen¹⁾, deren Kenntnis in Ingenieurkreisen im allgemeinen nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann. Man ersetzt daher häufig die Differentiale durch Differenzen. Diese Näherungslösung scheint hier um so mehr am Platze zu sein, als der Ansatz (11) bereits eine Annäherung darstellt und ferner für die Baugrundziffer in der Regel nur rohe Angaben vorliegen. Die Rechnung mit Differenzen erfordert nur einfache mathematische Kenntnisse, das Verfahren läuft praktisch auf die Lösung einer Gruppe linearer Gleichungen hinaus, eine Aufgabe, die von der Theorie der statisch unbestimmten Tragwerke her geläufig ist. Beiläufig sei noch bemerkt, daß bei der Rechnung mit Differenzen zwanglos eine Veränderlichkeit der Baugrundziffer berücksichtigt werden kann; mit Rücksicht auf die bereits erwähnte Unsicherheit der Baugrundziffer wollen wir hier jedoch davon absehen.

2. Der Ersatz der Differentiale durch Differenzen

Die in Abb. 1 dargestellte Funktion $y = y(x)$ möge durch einen Potenzansatz angenähert werden von der Form

$$y = a + b x + c x^2 + d x^3 + \dots$$

Darin sollen die Festwerte $a, b, c, \dots$ so bestimmt werden, daß y in den in gleichen Abständen λ aufeinander folgenden Punkten $\dots m-1, m, m+1 \dots$ die Werte $\dots y_{m-1}, y_m, y_{m+1} \dots$ annimmt. Der einfachste Kurvenansatz ist die Parabel vom Punkte $m-1$ bis $m+1$

$$y = a + b x + c x^2.$$

Der Abstand x zählt vom Punkte m aus. Für $x = 0$ muß dann $y = y_m$, für $x = \pm \lambda$ muß $y = y_{m\pm 1}$ sein. Damit erhält man

$$y = y_m - \frac{1}{2\lambda} (y_{m-1} - y_{m+1}) x + \frac{1}{2\lambda^2} (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}) x^2 \quad (14)$$

Die Ableitung dieses Ausdrucks nach x ergibt

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2\lambda} (y_{m-1} - y_{m+1}) + \frac{1}{\lambda^2} (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}) x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{\lambda^2} (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}). \end{aligned}$$

Im Punkte m ist wegen $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \left(\frac{dy}{dx} \right)_m = -\frac{1}{2\lambda} (y_{m-1} - y_{m+1}) \\ \text{b) } \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_m = \frac{1}{\lambda^2} (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}) \end{array} \right\} \quad (15)$$

Setzt man $x = \pm \lambda$, so erhält man die entsprechenden Ausdrücke für die Punkte $m+1$ bzw. $m-1$. So beträgt z. B. die erste Ableitung in den Punkten $m-1$ und $m+1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{m-1} = -\frac{1}{2\lambda} (3y_{m-1} - 4y_m + y_{m+1}) \\ \text{b) } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{m+1} = \frac{1}{2\lambda} (y_{m-1} - 4y_m + 3y_{m+1}) \end{array} \right\} \quad (16)$$

¹⁾ Schleicher, Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Berlin 1926, J. Springer. — Tölke, Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen. Stuttgart 1936, K. Wittwer.

Die höheren Ableitungen kann man mit diesem einfachen dreigliedrigen Ansatz nicht mehr bilden; wir müssen dazu auch die höheren Potenzen von x heranziehen. Für das Kurvenstück von $m-2$ bis $m+2$ ergibt sich entsprechend der fünfgliedrige Ansatz

$$\left. \begin{aligned} y &= y_m + \frac{1}{12\lambda} (y_{m-2} - 8y_{m-1} + 8y_{m+1} - y_{m+2}) x - \frac{1}{24\lambda^2} (y_{m-2} - 16y_{m-1} + 30y_m \\ &\quad - 16y_{m+1} + y_{m+2}) x^2 - \frac{1}{12\lambda^3} (y_{m-2} - 2y_{m-1} + 2y_{m+1} - y_{m+2}) x^3 \\ &\quad + \frac{1}{24\lambda^4} (y_{m-2} - 4y_{m-1} + 6y_m - 4y_{m+1} + y_{m+2}) x^4. \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

Daraus errechnen sich die dritten und vierten Ableitungen im Punkte m ($x=0$) zu

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_m &= -\frac{1}{2\lambda^3} (y_{m-2} - 2y_{m-1} + 2y_{m+1} - y_{m+2}) \\ \text{b) } \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right)_m &= \frac{1}{\lambda^4} (y_{m-2} - 4y_{m-1} + 6y_m - 4y_{m+1} + y_{m+2}). \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

Die Ableitungen nach x sind gleich denen nach r . Man erkennt dies sofort, indem man bildet

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dr}.$$

Aus Abb. 1 lesen wir ab

$$x = r - r_m, \text{ worin } r_m = \text{konst.}$$

Daraus folgt

$$\frac{dx}{dr} = 1 \text{ oder } dx = dr,$$

und damit

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx}.$$

Ebenso einfach wie die Differentiation gestaltet sich auch die Integration. Wir benötigen für die spätere Rechnung das statische Moment S der y -Fläche in bezug auf die Achse s

$$S = \int y r dr = \int y (r_m + x) dx = r_m \int y dx + \int y x dx.$$

Für das Flächenstück vom Punkte $m-1$ bis zum Punkte m ergibt sich, wenn wir für y den Ansatz (14) einführen

$$S_{m-1}^m = \int_{x=-\lambda}^0 y r dr = \frac{\lambda}{12} (5r_{m-1} y_{m-1} + 8r_m y_m - r_{m+1} y_{m+1}) + \frac{\lambda^2}{8} (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}). \dots (19a)$$

Entsprechend wird für das Flächenstück vom Punkte m bis $m+1$

$$S_m^{m+1} = \int_{x=0}^{+\lambda} y r dr = \frac{\lambda}{12} (-r_{m-1} y_{m-1} + 8r_m y_m + 5r_{m+1} y_{m+1}) - \frac{\lambda^2}{8} (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}). \dots (19b)$$

Durch Addition der beiden Ausdrücke (19a) und (19b) erhält man das statische Moment für das Flächenstück vom Punkte $m-1$ bis $m+1$

$$S_{m-1}^{m+1} = \int_{x=-\lambda}^{+\lambda} y r dr = \frac{\lambda}{3} (r_{m-1} y_{m-1} + 4r_m y_m + r_{m+1} y_{m+1}). \dots (19c)$$

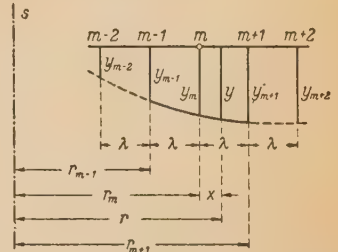
3. Die Schnittgrößen in Differenzenform

Setzt man die Ausdrücke (15) in Gleichung (4) ein, so erhält man mit

$$r_m = m\lambda, \text{ also } \frac{\lambda}{r_m} = \frac{1}{m} \dots (20)$$

die Biegemomente zu

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } M_{rm} &= -\frac{D}{\lambda^2} \left[\left(1 - \frac{\mu}{2m} \right) w_{m-1} - 2w_m + \left(1 + \frac{\mu}{2m} \right) w_{m+1} \right], \\ \text{b) } M_{tm} &= -\frac{D}{\lambda^2} \left[\left(\mu - \frac{1}{2m} \right) w_{m-1} - 2\mu w_m + \left(\mu + \frac{1}{2m} \right) w_{m+1} \right]. \end{aligned} \right\} \dots (21)$$



Ab. 1.

Zur Probe bilde man laut (5) und (6)

$$M_m = \frac{1}{1+\mu} (M_{rm} + M_{tm}) = -D (\Delta w)_m = -\frac{D}{\lambda^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2m}\right) w_{m-1} - 2w_m + \left(1 + \frac{1}{2m}\right) w_{m+1} \right] \dots \quad (22)$$

Die Querkräfte betragen entsprechend (9) und (15)

$$Q_{rm} = -\frac{1}{2\lambda} (M_{m-1} - M_{m+1}) \dots \quad (23a)$$

oder als Funktion von w angeschrieben

$$Q_{rm} = \frac{D}{2\lambda^3} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{m-1}\right) w_{m-2} - 2w_{m-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m+1} \right) w_m \right. \\ \left. + 2w_{m+1} - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{m+1}\right) w_{m+2} \right] \dots \quad (23b)$$

Führt man erst die Differentiation aus, bildet man also

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \Delta w = -D \left(w''' + \frac{1}{r} w'' - \frac{1}{r^2} w' \right)$$

und ersetzt dann die Differentiale durch Differenzen, so erhält man formelmäßig einen etwas anderen Aufbau

$$Q_{rm} = \frac{D}{2\lambda^3} \left[w_{m-2} - 2 \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2}\right) w_{m-1} + \frac{4}{m} w_m + 2 \left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2}\right) w_{m+1} - w_{m+2} \right] \dots \quad (23c)$$

Bei einer vollen Kreisplatte muß aus Symmetriegründen in Plattenmitte ($m=0$) $M_{r0} = M_{t0}$ sein; daraus ergibt sich die unbestimmte Größe $\frac{w_0'}{r_0}$ zu

$$\frac{w_0'}{r_0} = w_0''.$$

Die Biegemomente in Plattenmitte betragen damit

$$M_{r0} = M_{t0} = -D (1 + \mu) w_0'' = 2 (1 + \mu) \frac{D}{\lambda^2} (w_0 - w_1), \dots \quad (24)$$

wobei bereits berücksichtigt ist, daß infolge der Symmetrie $w_{-1} = w_1$ ist.

Die Querkraft muß in Plattenmitte verschwinden, wie aus (8) sofort ersichtlich ist

$$Q_{r0} = 0. \dots \quad (25)$$

Eine Ausnahme macht lediglich der Fall einer Einzellast in Plattenmitte. Dafür werden sowohl die Biegemomente als auch die Querkraft in Plattenmitte unendlich groß. Man vermeidet praktisch diese Singularität, indem man in Übereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen die Last über eine kleine Kreisfläche verteilt annimmt; für diesen Fall haben die Gleichungen (24) und (25) wieder Gültigkeit.

Besonders zu behandeln ist noch die Querkraft im Punkte $m=1$. Aus (24) folgt sofort

$$M_0 = \frac{1}{1+\mu} (M_{r0} + M_{t0}) = 4 \frac{D}{\lambda^2} (w_0 - w_1) \dots \quad (26)$$

Setzt man diesen Ausdruck sowie den Wert M_2 entsprechend (22) in die für $m=1$ angeschriebene Gleichung (23a) ein, so erhält man

$$Q_{r1} = -\frac{D}{2\lambda^3} (4w_0 - 3,25w_1 - 2w_2 + 1,25w_3) \dots \quad (27a)$$

Aus (23c) ergibt sich für $m=1$ mit $w_{-1} = w_1$ unmittelbar

$$Q_{r1} = -\frac{D}{2\lambda^3} (5w_0 - 5w_1 - w_2 + w_3) \dots \quad (27b)$$

Gelegentlich braucht man noch die Schnittgrößen in unmittelbarer Umgebung der Plattenmitte. Zu diesem Zweck entwickeln wir die Durchbiegung in der Nähe der Plattenmitte in eine Maclaurinsche Reihe²⁾

$$w \equiv w(r) = w_0 + \frac{w_0'}{1!} r + \frac{w_0''}{2!} r^2 + \frac{w_0'''}{3!} r^3 + \frac{w_0^{IV}}{4!} r^4 + \dots$$

Bei dem Ersatz der Differentiale durch Differenzen haben wir nur Glieder bis zum vierten Grade berücksichtigt — vgl. Gleichung (17). — Behalten wir dies hier bei und berücksichtigen wir ferner, daß aus Symmetriegründen

$$w_0' = w_0''' = 0$$

ist, so ergibt sich

$$w = w_0 + \frac{w_0''}{2!} r^2 + \frac{w_0^{IV}}{4!} r^4.$$

²⁾ Vgl. hierzu Beyer, Die Statik im Eisenbetonbau, II. Bd., 2. Aufl., S. 668. Berlin 1934, J. Springer.

Die Differentiation liefert

$$\begin{aligned}w' &= w_0'' r + \frac{w_0^{IV}}{3!} r^3 \\w'' &= w_0'' + \frac{w_0^{IV}}{2} r^2 \\w''' &= w_0^{IV} r \\w^{IV} &= w_0^{IV}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (4) ein, so erhält man die Momente in der Umgebung der Plattenmitte zu

$$\begin{aligned}\text{a) } M_r &= -D \left[(1 + \mu) w_0'' + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{3} \right) w_0^{IV} r^2 \right] \\ \text{b) } M_t &= -D \left[(1 + \mu) w_0'' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \mu \right) w_0^{IV} r^2 \right]\end{aligned} \quad (28)$$

Hierin ist laut (15) bzw. (18) bei Beachtung der Symmetrie

$$\begin{aligned}\text{a) } w_0'' &= \frac{1}{\lambda^2} (w_{-1} - 2 w_0 + w_1) = -\frac{2}{\lambda^2} (w_0 - w_1) \\ \text{b) } w_0^{IV} &= \frac{1}{\lambda^4} (w_{-2} - 4 w_{-1} + 6 w_0 - 4 w_1 + w_2) = \frac{2}{\lambda^4} (3 w_0 - 4 w_1 + w_2)\end{aligned} \quad (29)$$

Für $r = 0$ ergeben sich daraus die Momente in Plattenmitte, die wir früher bereits aus den Symmetrieeigenschaften unmittelbar hergeleitet haben — vgl. (24).

Der Operator Δw in der Umgebung der Plattenmitte beträgt

$$\Delta w = w'' + \frac{1}{r} w' = 2 w_0'' + \frac{2}{3} w_0^{IV} r^2,$$

woraus folgt

$$\frac{d}{dr} \Delta w = \frac{4}{3} w_0^{IV} r.$$

Die Querkraft nahe der Plattenmitte beträgt damit entsprechend Gleichung (9)

$$Q_r = -\frac{4}{3} D w_0^{IV} r. \quad (30)$$

Für $r = 0$ wird daraus $Q_{r0} = 0$, welchen Wert wir bereits früher in Gleichung (25) angeschrieben haben. Eine einfache Probe der abgeleiteten Ausdrücke für die Schnittgrößen besteht darin, daß wir $w_m = \text{konst.}$ setzen. Die Platte bleibt dann eben und infolgedessen spannungsfrei; sämtliche Schnittgrößen müssen sich daher zu Null ergeben.

Um spätere Wiederholungen zu vermeiden, untersuchen wir hier auch gleich den Wert $\Delta \Delta w$ in der Umgebung der Plattenmitte. Setzen wir die oben aus der Maclaurinschen Reihe gewonnenen Ableitungen von w in (3) ein, so erhalten wir

$$\Delta \Delta w = w_0^{IV} + \frac{2}{r} w_0^{IV} r - \frac{1}{r^2} \left(w_0'' + \frac{w_0^{IV}}{2} r^2 \right) + \frac{1}{r^3} \left(w_0'' r + \frac{w_0^{IV}}{3!} r^3 \right)$$

oder zusammengezogen und für w_0^{IV} den Differenzenausdruck laut (29b) eingesetzt

$$\Delta \Delta w = \frac{8}{3} w_0^{IV} = \frac{16}{3 \lambda^4} (3 w_0 - 4 w_1 + w_2). \quad (31)$$

Der Neigungswinkel, den die Tangente an die Biegelinie im Punkte m mit der Waagerechten bildet, ergibt sich aus (10) in Verbindung mit (15 a) zu

$$\varphi_m = \frac{1}{2 \lambda} (w_{m-1} - w_{m+1}). \quad (32)$$

Für die Plattenmitte ($m = 0$) folgt mit $w_{-1} = w_1$ daraus $\varphi_0 = 0$, wie es aus Symmetriegründen auch sein muß.

4. Die Bestimmungsgleichung für die Durchbiegung w

Für den Teilpunkt m im Abstand $r_m = m \lambda$ von Plattenmitte lautet die Plattengleichung (12)

$$(\Delta \Delta w)_m + \frac{K}{D} w_m = \frac{p_m}{D},$$

worin $\Delta \Delta w$ durch (3) definiert wurde. Setzt man darin die Werte (15) und (18) ein, so erhält man nach

Erweiterung mit λ^4 und Zusammenfassung entsprechender Ausdrücke die m te Bestimmungsgleichung in der Form³⁾

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{m} \right) w_{m-2} - \left[2 \left(2 - \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{2 m^2} \left(2 + \frac{1}{m} \right) \right] w_{m-1} + \left(6 + \frac{2}{m^2} + \frac{K}{D} \lambda^4 \right) w_m \\ - \left[2 \left(2 + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{2 m^2} \left(2 - \frac{1}{m} \right) \right] w_{m+1} + \left(1 + \frac{1}{m} \right) w_{m+2} = \frac{p_m \lambda^4}{D}.\end{aligned} \quad (33)$$

³⁾ Siehe Beyer, a. a. O.

punkt zusammen. Die letzten Bestimmungsgleichungen für w lauten dann entsprechend dem Schema (35)

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & a_{n-2} w_{n-4} - b_{n-2} w_{n-3} + c_{n-2} w_{n-2} - b'_{n-2} w_{n-1} + a'_{n-2} w_n = Z_{n-2} \\ b) \quad & a_{n-1} w_{n-3} - b_{n-1} w_{n-2} + c_{n-1} w_{n-1} - b'_{n-1} w_n + a'_{n-1} w_{n+1} = Z_{n-1} \\ c) \quad & a_n w_{n-2} - b_n w_{n-1} + c_n w_n - b'_n w_{n+1} + a'_n w_{n+2} = Z_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

Zur Ermittlung der Durchbiegungen w für die beiden gedachten, außerhalb der Platte liegenden Teilpunkte $n+1$ und $n+2$ ziehen wir die Gleichungen für die Schnittgrößen am Plattenrande n heran. Angenommen, das radiale Biegemoment M_{rn} sowie die Querkraft Q_{rn} am Plattenrande seien bekannt. Für M_{rn} gilt Gl. (21a), für Q_{rn} sei hier z. B. Gl. (23c) herangezogen. Dann gelten die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & \left(1 - \frac{\mu}{2n}\right) w_{n-1} - 2 w_n + \left(1 + \frac{\mu}{2n}\right) w_{n+1} = -\frac{\lambda^2}{D} M_{rn} \\ b) \quad & w_{n-2} - 2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) w_{n-1} + \frac{4}{n} w_n + 2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) w_{n+1} - w_{n+2} = \frac{2\lambda^3}{D} Q_{rn} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

Daraus folgt sofort

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & w_{n+1} = \frac{2n}{2n+\mu} \left[-\frac{\lambda^2}{D} M_{rn} - \frac{2n-\mu}{2n} w_{n-1} + 2 w_n \right] \\ b) \quad & w_{n+2} = -\frac{2\lambda^3}{D} Q_{rn} + w_{n-2} - 2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) w_{n-1} + \frac{4}{n} w_n + 2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) w_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

Setzt man nun den Wert w_{n+1} aus (39a) in (39b) ein und darauf die so gewonnene neue Gleichung für w_{n+2} sowie (39a) in die Gleichungen (37) ein, so erhält man nach Zusammenziehen der entsprechenden Werte w das folgende Schema

$$\left. \begin{aligned} a_{n-2} w_{n-4} - b_{n-2} w_{n-3} + c_{n-2} w_{n-2} - b'_{n-2} w_{n-1} + a'_{n-2} w_n &= Z_{n-2} \\ a_{n-1} w_{n-3} - b_{n-1} w_{n-2} + c_{n-1} w_{n-1} - b'_{n-1} w_n &= \bar{Z}_{n-1} \\ a_n w_{n-2} - b_n w_{n-1} + c_n w_n &= \bar{Z}_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

Zur Bestimmung der $n+1$ unbekannten Durchbiegungen w_0 bis w_n stehen somit $n+1$ fünfgliedrige Bestimmungsgleichungen zur Verfügung, deren Aufbau aus (35) und (40) hervorgeht.

Eine andere Möglichkeit des Vorgehens am Plattenrande ist die, daß man zunächst aus (37c) und (38b) die Unbekannte w_{n+2} ausschaltet. Mittels dieser neuen Gleichung, die nur noch die Durchbiegungen w_{n-2} bis w_{n+1} enthält, und (38a) drücken wir nun w_n und w_{n+1} durch w_{n-2} , w_{n-1} sowie die bekannten Werte Z_n , M_{rn} und Q_{rn} aus. Die so ermittelten Verschiebungen w_n und w_{n+1} werden dann in (37a) und (37b) eingesetzt. Dieses Verfahren bietet den Vorteil, daß jetzt nur noch n Bestimmungsgleichungen für w aufzulösen sind gegenüber $n+1$ bei dem vorigen Rechnungsgang.

Sind die Durchbiegungen w_0 bis w_n aus der Gleichungsgruppe (35) und (40) bestimmt, dann ergibt sich die Verschiebung w_{n+1} aus (39a). Den Wert w_{n+2} braucht man nicht zu berechnen, da ja die Querkraft am Plattenrande bekannt ist. Die Schnittgrößen ermitteln sich danach gemäß (21) bis (32).

In den Belastungsgliedern Z und $\bar{Z}$ auf der rechten Gleichungsseite tritt überall im Nenner die Plattensteifigkeit D auf. Ist die Platte ziemlich steif, ist also D groß, dann nehmen die Belastungsglieder kleine Werte an. Wir betrachten hier zunächst den Grenzfall der unendlich steifen Platte ($D = \infty$); dafür wird $Z = \bar{Z} = 0$. Die triviale Lösung $w = 0$ fällt wegen der Nachgiebigkeit des Baugrundes fort. Eine Lösung ist dann nur möglich, wenn die Nennerdeterminante des Gleichungssystems verschwindet; die Unbekannten

ergeben sich also in der unbestimmten Form $w = \frac{0}{0}$. Man kann zu diesem Ergebnis auch noch auf andere

Weise gelangen. Eine unendlich steife Platte bleibt stets eben, es sind also sämtliche w -Werte gleich. Setzt man nun in unsere Gleichungsgruppe (35) und (40) $w = \text{konst}$ ein, so erhält, wie man z. B. an (33) und (34) leicht nachprüfen kann, jede Gleichung die Form

$$w \cdot 0 = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad w = \frac{0}{0} = \text{unbestimmt.}$$

Normalerweise wird die Plattensteifigkeit zwar nicht unendlich, aber häufig immer noch groß gegenüber der Baugrundziffer, der Feldweite und der Belastung sein. Die Nennerdeterminante des Gleichungssystems wird dann einen kleinen Wert nahe bei Null aufweisen, die ganze Rechnung also ziemlich fehlerempfindlich werden. Für die Auflösung derartiger Gleichungsgruppen sind bestimmte Regeln zu beachten; z. B. ist es nicht mehr gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Unbekannten ausgeschaltet werden⁴⁾.

Ein leicht zu übersehender Fall ist noch der, daß die Belastung gleichmäßig verteilt ist ($p = \text{konst}$). Ist der Plattenrand kräftefrei, so hat die Plattengleichung (12) die Lösung⁵⁾

$$w = \text{konst} = \frac{p}{K} \dots \dots \dots (41)$$

⁴⁾ Näheres darüber siehe z. B. in v. Sanden, Praktische Analysis, 2. Aufl., S. 135. Leipzig 1923, B. G. Teubner. — Runge u. König, Numerisches Rechnen, S. 36. Berlin 1924, J. Springer.

⁵⁾ Vgl. z. B. Schleicher, a. a. O. S. 30.

Zum gleichen Ergebnis führt auch unsere fünfgliedrige Gleichungsgruppe. Man erkennt dies sofort, wenn man z. B. in (33) oder (34) $w_m = \text{konst} = w$ einsetzt.

5. Die Umformung der Plattengleichung

Unsymmetrische Bestimmungsgleichungen sind für die Auflösung unbequem; im Interesse der Rechnungsvereinfachung ist Symmetrie der Gleichungen anzustreben. Die Ursache der Unsymmetrie liegt, wie man aus (15) und (18) sofort erkennt, an den Gliedern w' und w'' . Die dritte Ableitung w''' tritt nicht auf, wenn man die Plattengleichung entsprechend (13) aufspaltet. Die ersten Differentialquotienten w' beseitigt man in bekannter Weise durch Einführung neuer Bezugsunbekannten⁶⁾. Setzt man

$$w = uz,$$

worin u und z ebenso wie w Funktionen von r sind, so ergibt sich mit

$$w' = u'z + uz' \quad \text{und} \quad w'' = u''z + 2u'z' + uz'' \quad \dots\dots\dots (42)$$

der Operator Δw laut (2), nach Ableitungen von u geordnet, zu

$$\Delta w = w'' + \frac{1}{r} w' = u''z + u' \left(2z' + \frac{z}{r} \right) + u \left(z'' + \frac{z'}{r} \right). \quad \dots\dots\dots (43)$$

Die Funktion z wird jetzt so bestimmt, daß der Beiwert von u' verschwindet

$$2z' + \frac{z}{r} = 0. \quad \dots\dots\dots (44)$$

Die Integration durch Trennung der Veränderlichen liefert

$$z = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Aus (44) folgt sofort

$$z' = -\frac{1}{2} \frac{z}{r} \quad \text{und daraus} \quad z'' = -\frac{1}{2} \left(\frac{z'}{r} - \frac{z}{r^2} \right) = +\frac{3}{4} \frac{z}{r^2}.$$

Setzt man diese Werte in (42) und (43) ein, so wird

$$\begin{aligned} w &= \frac{u}{\sqrt{r}} \\ w' &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(u' - \frac{1}{2} \frac{u}{r} \right) \\ w'' &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(u'' - \frac{u'}{r} + \frac{3}{4} \frac{u}{r^2} \right) \\ \Delta w &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(u'' + \frac{1}{4} \frac{u}{r^2} \right). \end{aligned}$$

In entsprechender Weise führen wir ein

$$\begin{aligned} M &= \frac{v}{\sqrt{r}} \\ M' &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(v' - \frac{1}{2} \frac{v}{r} \right) \\ M'' &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(v'' - \frac{v'}{r} + \frac{3}{4} \frac{v}{r^2} \right) \\ \Delta M &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(v'' + \frac{1}{4} \frac{v}{r^2} \right). \end{aligned}$$

In Differenzenform mittels Gl. (15) umgeschrieben wird daraus, wenn wir wieder entsprechend (20) $r_m = m\lambda$ einführen

$$\left. \begin{aligned} w_m &= \frac{u_m}{\sqrt{r_m}} \\ w_m' &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left(u_{m-1} + \frac{1}{m} u_m - u_{m+1} \right) \\ w_m'' &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left[\left(1 + \frac{1}{2m} \right) u_{m-1} - \left(2 - \frac{3}{4m^2} \right) u_m + \left(1 - \frac{1}{2m} \right) u_{m+1} \right] \\ (\Delta w)_m &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{r_m}} (u_{m-1} - \alpha_m u_m + u_{m+1}). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (45)$$

⁶⁾ Vgl. z. B. Bieberbach, Differentialgleichungen, S. 116. Berlin 1923, J. Springer.

und ebenso

$$\left. \begin{aligned} M_m &= \frac{r_m}{\sqrt{r_m}} \\ M_m' &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda \sqrt{r_m}} \left(v_{m-1} + \frac{1}{m} v_m - v_{m+1} \right) \\ M_m'' &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left[\left(1 + \frac{1}{2m} \right) v_{m-1} - \left(2 - \frac{3}{4m^2} \right) v_m + \left(1 - \frac{1}{2m} \right) v_{m+1} \right] \\ (\Delta M)_m &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{r_m}} (v_{m-1} - \alpha_m v_m + v_{m+1}). \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

In den Ausdrücken für Δw und ΔM ist zur Abkürzung eingeführt

$$\alpha_m = 2 - \left(\frac{1}{2m} \right)^2 \dots (47)$$

Diese Werte in unsere Bestimmungsgleichungen (13) eingesetzt und mit $\lambda^2 \sqrt{r_m}$ erweitert ergibt

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } u_{m-1} - \alpha_m u_m + u_{m+1} &= -\frac{\lambda^2}{D} v_m \\ \text{b) } v_{m-1} - \alpha_m v_m + v_{m+1} &= \lambda^2 (K u_m - p_m \sqrt{r_m}) \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

Aus (48a) folgt sofort

$$v_m = -\frac{D}{\lambda^2} (u_{m-1} - \alpha_m u_m + u_{m+1}) \dots (49)$$

Wird dieser Wert sowie die Werte v_{m-1} und v_{m+1} , die sich daraus durch zyklische Vertauschung ergeben, in (48b) eingesetzt, so erhält man nach Erweiterung mit $-\frac{\lambda^2}{D}$ und Zusammenfassung entsprechender Ausdrücke von u die m te Bestimmungsgleichung zu⁷⁾

$$u_{m-2} - (\alpha_{m-1} + \alpha_m) u_{m-1} + \left(2 + \alpha_m^2 + \frac{K \lambda^4}{D} \right) u_m - (\alpha_m + \alpha_{m+1}) u_{m+1} + u_{m+2} = \frac{\lambda^4}{D} p_m \sqrt{r_m} \dots (50)$$

In Plattenmitte ($m = 0$) ist, wenn wir wiederum eine volle Kreisplatte voraussetzen, $r_0 = 0$ und damit

$$u_0 = w_0 \sqrt{r_0} = 0, \dots (51)$$

da w_0 stets endlich bleibt. Ebenso ist auch für den Fall $M_0 \neq \infty$

$$v_0 = M_0 \sqrt{r_0} = 0. \dots (52)$$

Die Voraussetzung $M_0 \neq \infty$ ist keine Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit. Zwar werden für den Fall einer Einzellast in Plattenmitte die Biegemomente und damit auch die Momentensumme in Plattenmitte unendlich groß. Wie bereits früher erwähnt, ersetzt man praktisch die Einzellast durch eine verteilte Belastung über eine kleine Kreisfläche; M_0 bleibt dann wieder endlich.

Die Gleichungen (48) vereinfachen sich damit für $m = 1$ zu

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } -\alpha_1 u_1 + u_2 &= -\frac{\lambda^2}{D} v_1 \\ \text{b) } -\alpha_1 v_1 + v_2 &= \lambda^2 (K u_1 - p_1 \sqrt{r_1}) \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

Für $m = 2$ gelten bereits die normalen Gleichungen (48)

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } u_1 - \alpha_2 u_2 + u_3 &= -\frac{\lambda^2}{D} v_2 \\ \text{b) } v_1 - \alpha_2 v_2 + v_3 &= \lambda^2 (K u_2 - p_2 \sqrt{r_2}) \end{aligned} \right\} \dots (54)$$

Aus (53a) und (54a) ergibt sich

$$v_1 = \frac{D}{\lambda^2} (\alpha_1 u_1 - u_2) \quad \text{und} \quad v_2 = -\frac{D}{\lambda^2} (u_1 - \alpha_2 u_2 + u_3) \dots (55)$$

Setzt man diese Werte in (53b) ein, ordnet und erweitert mit $-\frac{\lambda^2}{D}$, so erhält man

$$\left(1 + \alpha_1^2 + \frac{K \lambda^4}{D} \right) u_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) u_2 + u_3 = \frac{\lambda^4}{D} p_1 \sqrt{r_1} \dots (56)$$

⁷⁾ Diese Gleichung findet sich bereits bei Pasternak, ZAMM. 6 (1926), S. 20.

Die Auflösung der beiden Gleichungen ergibt

$$\left. \begin{aligned} u_n &= -\frac{1}{N} \left[\left(Z_n + \frac{2\lambda^3 \sqrt{a}}{D} Q_{rn} \right) \left(1 - \frac{1-\mu}{2n} \right) - \frac{\lambda^2 \sqrt{a}}{D} M_{rn} \left(\alpha_n - \frac{1}{n} \right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{N} \left(1 - \frac{1-\mu}{2n} \right) u_{n-2} - \frac{2}{N} \left[\alpha_{n-1} - \left(\beta_n - \frac{1}{n} \right) \frac{1-\mu}{2n} \right] u_{n-1} \\ u_{n+1} &= -\frac{1}{N} \left[\left(Z_n + \frac{2\lambda^3 \sqrt{a}}{D} Q_{rn} \right) \left(\alpha_n - \frac{1-\mu}{2n^2} \right) - \frac{\lambda^2 \sqrt{a}}{D} M_{rn} \left(\gamma_n - \frac{\alpha_n}{n} \right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{N} \left(\alpha_n - \frac{1-\mu}{2n^2} \right) u_{n-2} + \frac{1}{N} \left[\gamma_n - \alpha_n (\alpha_{n-1} + \beta_n) + \frac{1-\mu}{2n} \left(\gamma_n + 2 \frac{\alpha_{n-1}}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right] u_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots \quad (62)$$

Darin ist N die Nennerdeterminante der beiden Gleichungen (61)

$$N = \alpha_n^2 - \gamma_n + \frac{1-\mu}{2n} \left(\gamma_n - 2 \frac{\alpha_n}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \dots \quad (63)$$

Setzt man diese Werte (62) in die Gleichungen (59) $a-d$ ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} u_{n-5} - \beta_{n-3} u_{n-4} + \gamma_{n-3} u_{n-3} - \beta'_{n-3} u_{n-2} + u_{n-1} &= \frac{Z_{n-3}}{Z_{n-1}} \\ u_{n-4} - \beta_{n-2} u_{n-3} + \gamma_{n-2} u_{n-2} - \beta'_{n-2} u_{n-1} &= \frac{Z_{n-2}}{Z_{n-1}} \\ u_{n-3} - \beta_{n-1} u_{n-2} + \gamma_{n-1} u_{n-1} &= \frac{Z_{n-1}}{Z_{n-1}} \end{aligned} \right\} \dots \quad (64)$$

worin die neuen überstrichenen Abkürzungen folgende Werte haben

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}'_{n-2} &= \beta'_{n-2} + \frac{2}{N} \left[\alpha_{n-1} - \left(\beta_n - \frac{1}{n} \right) \frac{1-\mu}{2n} \right] \\ \bar{\beta}_{n-1} &= \beta_{n-1} + \frac{2}{N} \left[\alpha_{n-1} - \left(\beta_n - \frac{1}{n} \right) \frac{1-\mu}{2n} \right] = \bar{\beta}'_{n-2} \\ \bar{\gamma}_{n-2} &= \gamma_{n-2} + \frac{2}{N} \left(1 - \frac{1-\mu}{2n} \right) \\ \bar{\gamma}_{n-1} &= \gamma_{n-1} + \frac{1}{N} \left\{ \gamma_n + 2 \frac{\alpha_{n-1}^2}{n^2} - \alpha_n^2 + \left[\gamma_n - 2 \beta_n^2 + (\alpha_{n-1} + \beta_n) \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right] \frac{1-\mu}{2n} \right\} \\ \bar{Z}_{n-2} &= Z_{n-2} + \frac{1}{N} \left[\left(Z_n + \frac{2\lambda^3 \sqrt{a}}{D} Q_{rn} \right) \left(1 - \frac{1-\mu}{2n} \right) - \frac{\lambda^2 \sqrt{a}}{D} M_{rn} \left(\alpha_n - \frac{1}{n} \right) \right] \\ \bar{Z}_{n-1} &= Z_{n-1} - \frac{1}{N} \left\{ \left(Z_n + \frac{2\lambda^3 \sqrt{a}}{D} Q_{rn} \right) \left[\alpha_{n-1} - \left(\beta_n - \frac{1}{n} \right) \frac{1-\mu}{2n} \right] + \frac{\lambda^2 \sqrt{a}}{D} M_{rn} \left(\gamma_n - \alpha_n \beta_n + \frac{\alpha_{n-1}}{n} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Wie man erkennt, ist auch bei dieser Umformung die Symmetrie der quadratischen Matrix zur Hauptdiagonale erhalten geblieben.

Die früher aufgestellten Bestimmungsgleichungen für w hatten die unangenehme Eigenschaft, daß bei großer Plattensteifigkeit D die Nennerdeterminante des Gleichungsschemas klein ist, die Gleichungen also ziemlich fehlerempfindlich werden. Die gleichen Verhältnisse liegen auch hier vor. Man erkennt dies sofort, wenn man zum Grenzfall $D = \infty$ übergeht. Gemäß (58) und (65) werden dann die rechten Gleichungsseiten Z bzw. $\bar{Z}$ sämtlich Null. Es muß demnach auch die Nennerdeterminante des Gleichungssystems verschwinden, denn die triviale Lösung $u = 0$ kommt wegen $w \neq 0$ nicht in Betracht.

Man muß also auch hier bei großer Plattensteifigkeit die Auflösung der Gleichungen mit besonderer Sorgfalt durchführen (vgl. Fußnote 4 auf S. 31).

Die für $D = \infty$ bekannte Lösung $w = \text{konst.}$ stellt sich allerdings hier nicht genau ein. Ebenso werden für den Fall einer gleichmäßig verteilten Belastung $p = \text{konst.}$ nicht alle w -Werte genau gleich, wie es eigentlich sein sollte. Den Beweis dafür führt man am einfachsten indirekt, indem man in die Gleichungen (57)

$p_m = \text{konst} = p$ und $w_m = \text{konst} = w = \frac{p}{K}$ -entsprechend (41) -einführt. Dafür wird laut (45) und (58)

$$u_m = w_m \sqrt{r_m} = \frac{p \sqrt{\lambda}}{K} \sqrt{r_m} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{\lambda^4}{D} p_m \sqrt{r_m} = \frac{p \lambda^4 \sqrt{\lambda}}{D} \sqrt{r_m}.$$

Setzt man diese Werte in die erste Gleichung der Gruppe (57) ein, so erhält man, wenn man noch durch $\frac{p \sqrt{\lambda}}{K}$ kürzt, unter Verwendung der Zahlenwerte der Tafel 2

$$5,7946 - 5,2149 + \frac{K \lambda^4}{D} = 0,5796 + \frac{K \lambda^4}{D} \mp \frac{K \lambda^4}{D}.$$

Bei der zweiten Gleichung wird der Fehler schon geringer, nämlich

$$10,1372 - 10,4593 + \frac{K \lambda^4}{D} \sqrt{2} = -0,3221 + \frac{K \lambda^4}{D} \sqrt{2} \mp \frac{K \lambda^4}{D} \sqrt{2}.$$

Der richtige Ansatz $w = \text{konst.}$ befriedigt also unsere Gleichungen nicht. Allerdings wird der Fehler um so geringer, je größer der Wert m wird; für $m = \infty$ stimmt unser Ansatz genau. Um dies einzusehen, stellen

wir zunächst allgemein die m te Gleichung, wieder gekürzt durch $\frac{p\sqrt{\lambda}}{K}$, auf

$$\sqrt{m-2} - \beta_m \sqrt{m-1} + \gamma_m \sqrt{m} - \beta_m' \sqrt{m+1} + \sqrt{m+2} = \frac{K \lambda^4}{D} \sqrt{m}.$$

Gekürzt durch $\sqrt{m}$ wird daraus

$$\sqrt{1 - \frac{2}{m}} - \beta_m \sqrt{1 - \frac{1}{m}} + \gamma_m - \beta_m' \sqrt{1 + \frac{1}{m}} + \sqrt{1 + \frac{2}{m}} = \frac{K \lambda^4}{D}.$$

Setzt man nun $m = \infty$ und beachtet, daß dafür, wie man auch aus Tafel 2 unschwer schließen kann,

$$\beta_m = \beta_m' = 4 \quad \text{und} \quad \gamma_m = 6 + \frac{K \lambda^4}{D}$$

wird, so erhält man

$$1 - 4 + \left(6 + \frac{K \lambda^4}{D}\right) - 4 + 1 = \frac{K \lambda^4}{D}.$$

Diese Gleichung ist genau erfüllt.

Noch auf eine andere Besonderheit sei hier hingewiesen. Zu berechnen sei eine Fundamentplatte mit mittiger Einzellast P , die, wie bereits mehrfach erwähnt, über einen kleinen Kreis vom Halbmesser ρ verteilt angreifen soll, und zwar sei dieser Radius ρ kleiner als die Feldweite λ . Verstehen wir unter p_m die jeweilige Belastung im Punkte m , so sind hier alle Werte p_1 bis p_n gleich Null. Entsprechend (58) verschwinden damit auch alle Belastungsglieder Z . Nehmen wir schließlich noch an, daß der Plattenrand kräftefrei ist, daß also $M_{rn} = Q_{rn} = 0$ ist, so fallen damit auch die Werte $\bar{Z}$ fort. Die rechten Gleichungsseiten unserer Gleichungsgruppe werden also vollständig zu Null. Die Nennerdeterminante dagegen ist bei endlicher Plattensteifigkeit von Null verschieden. Die Gleichungen haben in diesem Fall nur die Lösung $u = 0$ und damit auch $w = 0$. Darüber, daß diese Lösung unrichtig ist, besteht kein Zweifel. Wir müssen also unsere früheren Annahmen berichtigen, und zwar müssen wir die Belastung im Bereich ρ in einem bestimmten Verhältnis auf die Punkte 0 und 1 verteilen. Damit wird dann Z_1 ungleich Null, woraus sich dann wieder $u \neq 0$ ergibt. Natürlich kann man auch versuchen, diese Schwierigkeit irgendwie anders zu umgehen. Einfacher ist es jedoch, das ganze Problem überhaupt zum Verschwinden zu bringen. Bei der Spaltung des Belastungs- und Formänderungszustandes, die weiter unten behandelt wird, tritt diese Frage erst gar nicht auf.

6. Die Schnittgrößen in Abhängigkeit von u und v

Die Auflösung der Gleichungsgruppe (57) bzw. (64) liefert die Unbekannten u_1 bis u_{n-1} ; die noch fehlenden Werte u_n und u_{n+1} ergeben sich aus Gl. (62). Daraus bestimmen sich dann die Durchbiegungen w_1 bis w_{n+1} gemäß (45) zu

$$w_m = \frac{u_m}{\sqrt{r_m}}.$$

Die Durchbiegung w_0 in Plattenmitte kann man auf diese Weise allerdings nicht ermitteln; wir ziehen hierzu die Gleichungen (34) heran und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \text{aus (34a)} \quad w_0 &= \frac{1}{16 + \frac{K \lambda^4}{D}} \left[\frac{p_0 \lambda^4}{D} + \frac{16}{3} (4 w_1 - w_2) \right] \\ \text{bzw. aus (34b)} \quad w_0 &= \frac{1}{3} (4 w_1 - w_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66)$$

Sind sämtliche Durchbiegungen w bekannt, dann lassen sich die Schnittgrößen gemäß (21) bis (32) errechnen.

Man kann natürlich auch die u - bzw. v -Werte unmittelbar zur Berechnung der Schnittgrößen heranziehen. Setzt man die Ausdrücke (45) in die Gleichungen (4) ein, so erhält man mit $r_m = m \lambda$

$$\left. \begin{aligned} M_{rm} &= -\frac{D}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left[\left(1 + \frac{1-\mu}{2m}\right) u_{m-1} - \left(\alpha_m - \frac{1-\mu}{2m^2}\right) u_m + \left(1 - \frac{1-\mu}{2m}\right) u_{m+1} \right] \\ M_{tm} &= -\frac{D}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left[\left(\mu - \frac{1-\mu}{2m}\right) u_{m-1} - \left(\mu \alpha_m + \frac{1-\mu}{2m^2}\right) u_m + \left(\mu + \frac{1-\mu}{2m}\right) u_{m+1} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67)$$

Darin bedeutet α_m wieder die Abkürzung nach Gl. (47).

Zur Probe bilde man laut (5) bzw. (46)

$$M_{rm} + M_{tm} = (1 + \mu) M_m = (1 + \mu) \frac{v_m}{\sqrt{r_m}}, \quad \dots \dots \dots (68)$$

worin die v -Werte gemäß (49) aus den u -Werten zu ermitteln sind.

Die Momente in Plattenmitte und in der Umgebung derselben lassen sich mit diesen Formeln nicht bestimmen. Zur Ermittlung dieser Werte muß man auf die Durchbiegungen w zurückgehen – siehe (24) bzw. (28).

Zur Bestimmung der Querkraft benutzen wir die Schreibweise (9). Drückt man darin M' laut (46) durch v aus, so ergibt sich

$$Q_{rm} = -\frac{1}{2\lambda} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left(v_{m-1} + \frac{1}{m} v_m - v_{m+1} \right) \dots \dots \dots (69a)$$

Ersetzt man nun noch die v -Werte nach (49) durch u , so erhält man

$$Q_{rm} = \frac{D}{2\lambda^3} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left[u_{m-2} - \left(\alpha_{m-1} - \frac{1}{m} \right) u_{m-1} - \frac{\alpha_m}{m} u_m + \left(\alpha_{m+1} + \frac{1}{m} \right) u_{m+1} - u_{m+2} \right] \dots \dots (69b)$$

Für den Teilpunkt $m = 1$ geht Gl. (69a) mit $r_1 = \lambda$ und $v_0 = 0$ über in

$$Q_{r1} = -\frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} (v_1 - v_2) \dots \dots \dots (70)$$

Drückt man nun die v -Werte entsprechend (55) durch u aus, so ergibt sich als Sonderfall von Gl. (69b)

$$Q_{r1} = -\frac{D}{2\lambda^3\sqrt{\lambda}} [(\alpha_1 + 1) u_1 - (\alpha_2 + 1) u_2 + u_3] \dots \dots \dots (70b)$$

In Plattenmitte wird entsprechend (25) $Q_{r0} = 0$.

Setzt man schließlich den Wert w' aus Gl. (45) in (10) ein, so erhält man den Neigungswinkel zu

$$\varphi_m = \frac{1}{2\lambda} \frac{1}{\sqrt{r_m}} \left(u_{m-1} + \frac{1}{m} u_m - u_{m+1} \right) \dots \dots \dots (71)$$

In Plattenmitte wird aus Symmetriegründen $\varphi_0 = 0$.

Berechnet man die Schnittgrößen zahlenmäßig einmal aus den Formeln (21) bis (32), zum anderen Male aus den oben angeschriebenen Gleichungen (67) bis (71), so werden die Ergebnisse im allgemeinen kleinere Unterschiede aufweisen, die durch die Näherungsansätze bedingt sind.

7. Eine Rechenprobe

Bei der Auflösung der Bestimmungsgleichungen für w bzw. u bieten sich eine Reihe von Rechenproben dar, auf die man hier im Hinblick auf die meist vorhandene Fehlerempfindlichkeit der Gleichungen nicht verzichten sollte⁸⁾. Eine weitere Rechenprobe ergibt sich aus der Bedingung, daß der Auftrieb der vorhandenen Belastung das Gleichgewicht halten muß. Wir betrachten als Beispiel eine Fundamentplatte mit kräftefreiem Rande. Der Plattenhalbmesser a sei in fünf Teile geteilt, die gesamte Auflast betrage P (Abb. 2).

Dann muß sein

$$P = 2\pi \int_0^a q r dr = 2\pi K \int_0^a w r dr = 2\pi K S_0^5,$$

worin S_0^5 das statische Moment der w -Fläche in bezug auf die Plattenmittellachse darstellt. Dieses setzt sich zusammen aus

$$S_0^5 = S_0^1 + S_1^3 + S_3^5.$$

Setzt man hierin die Werte (19b) bzw. (19c) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} S_0^5 &= \frac{\lambda}{12} (-r_{-1} w_{-1} + 8 r_0 w_0 + 5 r_1 w_1) - \frac{\lambda^2}{8} (w_{-1} - 2 w_0 + w_1) \\ &\quad + \frac{\lambda}{3} (r_1 w_1 + 4 r_2 w_2 + r_3 w_3) + \frac{\lambda}{3} (r_3 w_3 + 4 r_4 w_4 + r_5 w_5). \end{aligned}$$

Mit

$$r_{-1} = -r_1, \quad r_0 = 0, \quad r_m = m\lambda; \quad w_{-1} = w_1 \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{a}{5}$$

beträgt zusammengezogen

$$S_0^5 = \frac{a^2}{300} (3 w_0 + 7 w_1 + 32 w_2 + 24 w_3 + 64 w_4 + 20 w_5).$$

Damit ergibt sich also die Rechenprobe zu

$$P = \frac{a^2 \pi K}{150} (3 w_0 + 7 w_1 + 32 w_2 + 24 w_3 + 64 w_4 + 20 w_5) \dots \dots \dots (72)$$

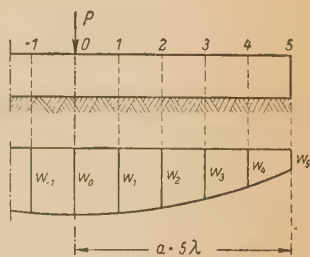


Abb. 2.

⁸⁾ Vgl. Fußnote 4 auf S. 31.

8. Die Spaltung des Belastungs- und Formänderungszustandes

Sowohl in unserer Ausgangsgleichung (12) als auch in den Formeln für die Schnittgrößen kommt die Durchbiegung w und die Belastung p nur in der ersten Potenz vor. Es ist daher zulässig, die endgültigen Werte durch Überlagerung einer Anzahl von Teilwerten zu gewinnen. Wir setzen an

$$w = w_1 + w_2 + w_3,$$

während wir die Belastung nur in zwei Teile aufspalten wollen

$$p = p_1 + p_2.$$

Dabei sollen Ausdrücke mit gleichem Zeiger zusammen gehören. Zu p_1 gehört also w_1 , zu p_2 die Durchbiegung w_2 ; dem dritten Teilwert w_3 möge keine äußere Belastung p entsprechen.

Über die Art der Aufteilung in die einzelnen Zustände kann man frei verfügen. Man kann auch zu der gegebenen äußeren Belastung Lastzustände hinzufügen, die aus gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften bestehen.

Die Plattengleichung (12) geht damit über in

$$\Delta \Delta w_1 + \Delta \Delta w_2 + \Delta \Delta w_3 + \frac{K}{D} (w_1 + w_2 + w_3) = \frac{p_1}{D} + \frac{p_2}{D} \dots \dots \dots (73)$$

Der erste Teilzustand sei so gewählt, daß zwischen den Lasten p_1 und den Durchbiegungen w_1 die Gl. (1) besteht

$$\Delta \Delta w_1 = \frac{p_1}{D} \dots \dots \dots (74)$$

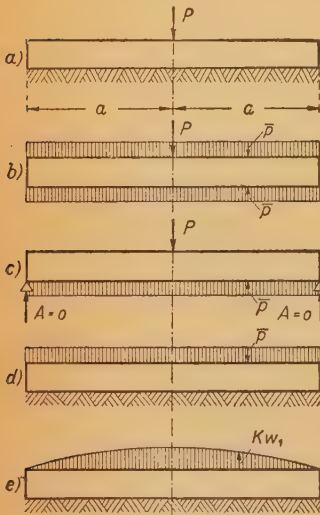


Abb. 3.

Es handelt sich also bei dem ersten Teilzustand um eine normale Kreisplatte, ohne elastische Stützung.

Die zum zweiten Teilzustand gehörige Gleichung möge lauten

$$\Delta \Delta w_2 + \frac{K}{D} w_2 = \frac{p_2}{D} \dots \dots \dots (75)$$

Der zweite Teilzustand stellt somit eine elastisch gelagerte Platte dar. Zweckmäßig wählt man die Belastung so, daß man die Lösung unmittelbar angeben kann.

Geht man nun mit den beiden Ansätzen (74) und (75) in die Gleichung (73) ein, so bleibt für den dritten Teilzustand übrig

$$\Delta \Delta w_3 + \frac{K}{D} (w_1 + w_3) = 0$$

oder

$$\Delta \Delta w_3 + \frac{K}{D} w_3 = -\frac{K w_1}{D} \dots \dots \dots (76)$$

Der Vergleich dieser Beziehung mit der Ausgangsgleichung (12) zeigt, daß bei diesem dritten Teilzustand eine Fundamentplatte vorliegt, die an Stelle der üblichen Last p die Belastung $-K w_1$ zu tragen hat.

Als Beispiel ist in Abb. 3 der Fall einer Einzellast P in Plattenmitte dargestellt. Wir denken uns nun zwei entgegengesetzt gerichtete, gleichmäßig verteilte Belastungen $\bar{p} = \frac{P}{a^2\pi}$ hinzugefügt (Abb. 3b). Als erster

Teilzustand ergibt sich dann eine ringsum frei aufliegende Kreisplatte mit einer mittigen Einzellast P und einer nach oben gerichteten gleichmäßig verteilten Belastung $\bar{p}$. Der Auflagerdruck am Plattenrande beträgt $A = 0$ (Abb. 3c). Fertige Formeln für die Durchbiegungen und Schnittgrößen für diesen Teilzustand liegen im Schrifttum vor⁹⁾, so daß die gesamte Arbeit im Einsetzen der Zahlenwerte besteht.

Der zweite Teilzustand stellt eine Fundamentplatte dar, auf welche die gleichmäßig verteilte Belastung $p_2 = \bar{p}$ einwirkt. Die Durchbiegung für diesen Fall beträgt nach (41)

$$w_2 = \text{konst} = \frac{\bar{p}}{K}.$$

Schnittgrößen treten nicht auf, da die Platte bei der Einsenkung eben bleibt (Abb. 3d).

Mittels des Differenzenverfahrens zu untersuchen ist dann nur der dritte Teilzustand, bei dem an die Stelle der Belastung der Wert $-K w_1$ tritt (Abb. 3e).

Um einen Überblick über die Größenordnung der einzelnen Teilzustände zu gewinnen, betrachten wir als Zahlenbeispiel wiederum eine Platte mit mittiger Einzellast, und zwar soll sein

$$P = 2000 \text{ kg}; \quad a = 13,83 \text{ cm}; \quad h = 2 \text{ cm}; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2; \quad \mu = 0,3; \quad K = 40 \text{ kg/cm}^3.$$

Die Plattensteifigkeit ergibt sich damit zu

$$D = 1,4652 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2/\text{cm}.$$

⁹⁾ Vgl. z. B. Beyer, a. a. O. — Worch, Elastische Platten, Beton-Kalender, Teil I, S. 104ff. Berlin 1944, Wilh. Ernst & Sohn.

Die Einzellast P möge sich auf einen kleinen Kreis vom Halbmesser $\varrho = 1$ cm gleichmäßig verteilen. Die Belastung $\bar{p}$ beträgt schließlich

$$\bar{p} = \frac{P}{a^2 \pi} = \frac{2000}{13,83^2 \pi} = 3,3284 \text{ kg/cm}^2.$$

Für den ersten Teilzustand ergeben sich die folgenden Durchbiegungen
in Plattenmitte $w_{01} = 7,89 \cdot 10^{-3}$ cm
am Plattenrand $w_{n1} = 0$.

Das radiale Biegemoment an der Stelle ϱ beträgt
 $M_{r\varrho 1} = 412,9 \text{ kgcm/cm}$.

Die Durchbiegung für den zweiten Teilzustand ist konstant; sie hat die Größe

$$w_{02} = w_{n2} = \frac{\bar{p}}{K} = \frac{3,3284}{40} = 0,0832 \text{ cm}.$$

Biegemomente und Querkräfte treten nicht auf.

Für den ersten und zweiten Teilzustand zusammen ergeben sich somit die folgenden Werte

Durchbiegung in Plattenmitte 0,0911 cm

Durchbiegung am Plattenrand 0,0832 cm.

Radiales Biegemoment im Punkte ϱ 412,9 kgcm/cm.

Die gesamten, mittels der Theorie der Zylinderfunktionen ermittelten Werte betragen¹⁰⁾.

$$w_0 = 0,0883 \text{ cm}$$

$$w_n = 0,0804 \text{ cm}$$

$$M_{r\varrho} = 416,7 \text{ kgcm/cm}.$$

Für den Teilzustand 3 verbleiben demnach die Werte

$$w_{03} = -0,0028 \text{ cm}$$

$$w_{n3} = -0,0028 \text{ cm}$$

$$M_{r\varrho 3} = 3,8 \text{ kgcm/cm}.$$

Die nach dem Differenzenverfahren zu ermittelnden Durchbiegungen betragen hier somit weniger als 4 v. H. des Gesamtwertes. Bei den Momenten ist der Prozentsatz sogar noch geringer; er ergibt sich zu weniger als 1 v. H. des Gesamtwertes.

Natürlich kann man die an einem einzigen Beispiel gewonnenen Erfahrungen nicht verallgemeinern. Es ist zu erwarten, daß in anderen Fällen ungünstigere Verhältnisse eintreten.

Verhältnismäßig leicht zu übersehen ist, wie sich die Ergebnisse verschieben, wenn bei sonst gleichen Abmessungen und Baustoffzahlen sich die Plattensteifigkeit D bzw. die Baugrundziffer K ändert. Die Plattensteifigkeit tritt bei dem 1. Teilzustand auf, die Baugrundziffer kommt im 2. Teilzustand vor. Der Quotient

$\frac{w_2}{w_1}$ - zweckmäßig für die Plattenmitte $m = 0$ angesetzt - berücksichtigt also sowohl eine Änderung von D als auch eine solche von K . Wie man unschwer nachprüfen kann, wird der Einfluß des 3. Teilzustandes um

so geringer, je größer der Quotient $\frac{w_{02}}{w_{01}}$ wird. Bei großen Verhältniswerten $\frac{w_{02}}{w_{01}}$ wird das Problem also bereits

durch die Teilzustände 1 und 2 erfaßt, die mit beliebiger Genauigkeit durchgerechnet werden können. Der dritte, nach dem Differenzenverfahren zu berechnende Teilzustand stellt lediglich eine Korrektur der aus den beiden ersten Teilzuständen gewonnenen Werte dar. Unter Umständen kann man sogar auf diese Korrektur verzichten. Mindestens wird man jedoch erwarten können, daß Ungenauigkeiten der Näherungsrechnung das Gesamtergebnis im allgemeinen nur unwesentlich beeinflussen werden.

Um einen Anhalt über die Größenordnung des Quotienten $\frac{w_{02}}{w_{01}}$ zu gewinnen, bilden wir für unser Zahlenbeispiel

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{0,0832}{0,00789} = 10,54.$$

9. Zusammenfassung

Zur Berechnung kreisförmiger zentralsymmetrischer Fundamentplatten wird ein Näherungsverfahren entwickelt. Den Ausgangspunkt bildet die bekannte Differentialgleichung für die Durchbiegung der Plattenmittelfläche. Der Ersatz der Differentiale durch Differenzen führt zu unsymmetrischen fünfgliedrigen Gleichungen für die unbekannten Durchbiegungen. Durch Spaltung der Differentialgleichung und Einführung von Differenzen gelingt es, auf eine Gruppe symmetrischer fünfgliedriger Bestimmungsgleichungen zu kommen. Der beschriebene Rechnungsgang bedient sich nur einfacher mathematischer Hilfsmittel; die auftretenden linearen Gleichungen ähneln den sog. Elastizitätsgleichungen der statisch unbestimmten Systeme. Durch Aufspaltung des Belastungs- und Formänderungszustandes wird die Genauigkeit der Rechnung wesentlich gesteigert. Abweichungen, die durch die Näherung entstehen können, sowie Rechengenauigkeiten bei der Auflösung der Bestimmungsgleichungen machen sich im Gesamtergebnis in der Regel nur wenig bemerkbar.

¹⁰⁾ Vgl. Schleicher, a. a. O. S. 38.

Das Knickproblem bei Spitzenpfählen, deren Schaft ganz oder teilweise in nachgiebigem Boden steht

Von Dr.-Ing. Helmut Walter, Grün & Bilfinger AG., Wiesbaden-Schierstein

In allen Fällen, in denen der tragfähige Baugrund von mächtigen Schichten nicht tragfähigen weichen Bodens überlagert ist, bietet der sogenannte Spitzenpfahl ein geeignetes Mittel, um hohe Bauwerkslasten auf die tiefliegende Gründungssohle zu übertragen. Durch die fortschreitende Entwicklung der Rammergeräte, der Pfahlhaustoffe und der Rechenmethoden ist es keine Seltenheit mehr, daß 30 m, ja sogar 40 m lange Pfähle hierbei zur Verwendung kommen. Durch die Berechnungsmethoden von Ostenfeld¹⁾ und Nöckentved²⁾ ist es möglich, auch bei vielfach statisch unbestimmten Pfahlböcken, die Belastung, die die einzelnen Pfähle zu übernehmen haben, einwandfrei zu ermitteln. Die Frage nach der Knicksicherheit der Einzelpfähle wurde jedoch noch nicht eingehend behandelt. Die bekannte Literatur über Grundbau³⁾ bringt zwar allgemeine Hinweise auf die Knickgefahr von hohen Pfahlböcken, zeigt jedoch keinen Weg zur Lösung des Problems. Die vorliegende Arbeit wurde veranlaßt durch die beim Bau der Pfeiler einer Straßenbrücke über den unteren Bug aufgetauchten Bedenken hinsichtlich der Knicksicherheit der dort verwendeten 30 m langen Stahlrohrpfähle, die auf etwa $\frac{1}{4}$ ihrer Länge in den weichplastischen Ablagerungen des Flusses standen. Da die Pfähle ohne Berücksichtigung der Stützung durch die umgebenden Bodenschichten nicht mehr knicksicher waren, half man sich beim rechnerischen Knicksicherheitsnachweis mit der Annahme eines „gefühlsmäßig geschätzten“ unteren Einspannpunktes. Die vorliegende Arbeit gestattet die rechnerische Berücksichtigung der seitlichen Stützkkräfte.

A. Allgemeine Betrachtungen zum Knickproblem

Die erste mathematische Behandlung des Knickproblems des seitlich ungestützten Stabes erfolgte durch Euler im Jahre 1744, wurde jedoch zunächst wenig beachtet. Erst mit der raschen Entwicklung des Eisenbaus in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde dem Knickproblem allgemeine Beachtung geschenkt. Besonders Friedrich Engeßer hat sich mit diesen Fragen befaßt und auch das Problem des seitlich elastisch gestützten Stabes erstmalig behandelt⁴⁾, so daß heute gelegentlich von der klassischen „Euler-Engeßerschen Knicktheorie“ gesprochen wird.

Die „klassische Theorie“ geht bei der Ermittlung der Knicklast von einem ursprünglich vollkommen geraden, zentrisch belasteten und aus vollkommen homogenem Material bestehenden Druckstab aus und sucht die zu einer gedachten oder durch einen vorübergehenden äußeren Eingriff hervorgerufene Ausbiegung gehörende Gleichgewichtsdruckkraft. Es zeigt sich hierbei, daß – unter der Annahme $\frac{M}{EJ} \equiv y''$ und unter der

Annahme, daß die Elastizität des Materials unbegrenzt dem Hookschen Gesetz folgt – bei einer bestimmten theoretisch genau zu ermittelnden Drucklast, der sogenannten Knicklast, für jeden Druckstab eine unendliche Zahl von affinen Gleichgewichtslagen möglich ist. Ist die Gebrauchslast, mit der ein Druckstab belastet ist, kleiner als die „Knicklast“, so geht ein durch äußeren Eingriff ausgeübter Druckstab wieder in seine gerade Anfangslage zurück, ist die Gebrauchslast größer, so vergrößert sich die erteilte Ausbiegung und der Stab knickt aus. Es wird in diesem Zusammenhang gesagt, daß die Knicklast dem „Verzweigungspunkt des Gleichgewichts“ zugeordnet ist.

Der oben angedeutete Gedankengang führt bei einfachen Knickfällen mit Hilfe einer Differentialgleichung zweiten Grades zu einer sehr kurzen und eleganten Ableitung, die jedoch den Nachteil hat, daß sie wenig anschaulich ist, da sie dem in der Baupraxis auftretenden mechanischen Vorgang beim Ausknicken eines Druckstabes nicht gerecht wird.

In der Baupraxis haben alle Druckstäbe von vornherein eine, wenn auch noch so kleine, unbeabsichtigte Anfangsausbiegung; die Lastaufbringung ist nicht exakt zentrisch, und außerdem ist der Baustoff in bezug auf seine Elastizität mit gewissen inneren Ungleichmäßigkeiten behaftet. Alle diese Unregelmäßigkeiten sollen im folgenden unter dem Begriff „Anfangsexzentrizität“ zusammengefaßt werden. Bereits beim Aufbringen der ersten Belastung, die kleiner als die Knicklast sein soll, entsteht infolge der vorhandenen Anfangsexzentrizität ein am Druckstab wirkendes Biegemoment, das eine erste zusätzliche Ausbiegung und damit Vergrößerung der Anfangsexzentrizität hervorruft. Dadurch entsteht ein neues Moment, das eine weitere Ausbiegung verursacht. Der Vorgang setzt sich fort, bis Gleichgewicht der äußeren und inneren Kräfte vorhanden ist oder der Stab bricht. Wie leicht einzusehen, kann bei einem von vornherein exzentrisch belasteten Stab die größte Randspannung bereits vor dem Aufbringen der theoretischen Knicklast größer werden als die vom Material aufnehmbare Spannungshöchstgrenze. Infolge der „baupraktisch unvermeidbaren Außermittigkeit des Kraftangriffs“ ist die sogenannte „Traglast“ eines Druckstabes kleiner als die theoretische Knicklast.

Für kurze Druckstäbe wird auch ohne das Vorhandensein einer Anfangsexzentrizität die vom Baumaterial abhängige Spannungshöchstgrenze bereits vor dem Auftreten der theoretischen Knickspannung überschritten. Aber auch hier tritt infolge von Anfangsexzentrizität eine zusätzliche Vergrößerung der größten Randspannung auf.

In der Baupraxis handelt es sich beim Druckstab nicht so sehr um ein Gleichgewichtsproblem als um ein Spannungsproblem.

¹⁾ Ostenfeld, Berechnung von Pfahlrosten. B. u. E. 21 (1922), Heft 1 u. 3, S. 21 u. 33.

²⁾ Nöckentved, Berechnung von Pfahlrosten. Berlin 1928, Wilh. Ernst & Sohn.

³⁾ Brennecke-Lohmeyer, Der Grundbau, 6. Aufl., Bd. I, Teil 1: Baugrund. Berlin 1948, Wilh. Ernst & Sohn. Kögler-Scheidig, Baugrund und Bauwerk, 5. Aufl. Berlin 1948, Wilh. Ernst & Sohn.

⁴⁾ Engeßer, Die Sicherung offener Brücken gegen Ausknicken. Ztrbl. d. Bauverwaltung 1884, Heft 40, S. 415. – Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin 1892, Jul. Springer.

Die hier angedeuteten Gedankengänge und der Zusammenhang zwischen Anfangsexzentrizität, Knicklast und Traglast wurden erstmals von Hartmann⁵⁾ beim ungestützten Stab eingehend dargestellt. Wie Chwalla in den „Erläuterungen zu DIN 4114“ ausführlich darlegt, wurde in den neuen „Knick- und Beulvorschriften für Stahlbau“ der Einfluß der „baupraktisch unvermeidbaren Außermittigkeit des Kraftangriffs“ bei der Festlegung der Knicksicherheitsfaktoren eingehend berücksichtigt.

Da bei Pfahlgründungen unter allen Umständen mit dem Vorhandensein einer Anfangsexzentrizität gerechnet werden muß, ist es notwendig, ihren Einfluß von vornherein zu berücksichtigen und Klarheit darüber zu schaffen, wie weit die praktische Traglast unter dem Einfluß der Anfangsexzentrizität gegenüber der theoretischen Knicklast absinkt.

Bei den folgenden Ableitungen wird daher grundsätzlich von einer vorhandenen Anfangsexzentrizität ausgegangen. Es wird dabei ein einfacher und anschaulicher Weg beschritten, der dem in der Praxis auftretenden mechanischen Vorgang beim Knicken entspricht.

Um einen klaren Einblick in den Knickvorgang zu bekommen, wird zunächst der nicht quergestützte, an beiden Enden gelenkig gelagerte Druckstab mit Anfangsexzentrizität nach der angegebenen Methode untersucht.

B. Knicklast und Endausbiegung beim beiderseits gelenkig gelagerten Stab ohne elastische Querstützung

Es wird angenommen, daß der Stab bereits vor Aufbringen der Drucklast infolge ungenauer Herstellung eine sinusförmige Anfangsausbiegung von der Form und Größe $y_0 = f_0 \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x$ habe.

Der Knickvorgang spielt sich dann folgendermaßen ab: Durch Aufbringen der Drucklast P entsteht ein Biegemoment von der Form und Größe:

$$M_0 = P \cdot f_0 \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Durch dieses Anfangsmoment entsteht eine erste zusätzliche Ausbiegung.

Aus der einfachen Differentialgleichung der Biegelinie $y_1'' = \frac{M_0}{EJ}$ erhält man:

$$y_1 = f_0 \cdot \frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Infolge dieser ersten zusätzlichen Ausbiegung und der Last P entsteht wieder ein neues zusätzliches Moment, $M_1 = P \cdot y_1$; daraus eine neue Durchbiegung usw. Man erhält

$$y_2 = f_0 \left(\frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} \right)^2 \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

$$\text{Allgemein: } y_n = f_0 \left(\frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} \right)^n \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Für die Gesamtausbiegung ergibt sich folgende unendliche Reihe:

$$y = f_0 \cdot \left[1 + \frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} + \left(\frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} \right)^2 + \left(\frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} \right)^3 + \dots + \left(\frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} \right)^n + \dots \right] \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Die Reihe hat endliche Grenzwerte für $\frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} < 1$. Aus der Konvergenzbedingung ergibt sich die kritische Knicklast zu:

$$P_k = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} \quad (1)$$

Ist die Gebrauchslast $P < P_k$, so erhält man eine endliche Ausbiegung von der Form und Größe:

$$y = f_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2}} \sin \frac{\pi}{l} \cdot x = f_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} \sin \frac{\pi}{l} \cdot x \quad (2)$$

Wird die Gebrauchslast gleich oder größer P_k , so wird der Endwert der Reihe unendlich, d. h. der Stab knickt aus.

Die theoretische Knicklast, die sich nach (1) bei Vorhandensein einer sinusförmigen Anfangsausbiegung unabhängig von der Größe des Anfangspfeils f_0 ergibt, ist von gleicher Größe wie die nach der klassischen Theorie ermittelte „Eulersche Knicklast“. Die Knicklast ergibt sich hier nicht als Gleichgewichtslast am Verzweigungspunkt des Gleichgewichts, sondern als Grenzwert aus der Bedingung, daß die Stabausbiegung endlich bleiben soll.

⁵⁾ Hartmann, Kippung, Knickung, Beulung. Wien 1937, Deuticke.

Der Zusammenhang zwischen größter Gebrauchslast, Anfangsausbiegung, Knicklast und größter Randspannung des Stabes ergibt sich aus den einfachen Beziehungen:

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W} \dots \dots \dots (3)$$

$$M = P \cdot y_{\max} \dots \dots \dots (4)$$

$$y_{\max} = f_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} \dots \dots \dots (2a)$$

Bei gegebener Anfangsausbiegung f_0 in Stabmitte muß die Gebrauchslast P so festgelegt werden, daß die größte Randspannung σ einen genügenden Sicherheitsabstand von der dem Baustoff eigenen Spannungshöchstgrenze hat. Die hier auftretenden Gesetzmäßigkeiten werden im Abschnitt D näher behandelt. Derselbe Rechnungsgang wie oben läßt sich für jede beliebige Form der Anfangsexzentrizität wiederholen. Dabei ergeben sich allerdings für die aufeinanderfolgenden Ausbiegungen unter Umständen sehr umständliche Ausdrücke. Durch numerische Auswertung läßt sich jedoch zeigen, daß die aufeinanderfolgenden Ausbiegungen unabhängig von der Form der Anfangsausbiegung sehr rasch der reinen Sinusform zustreben und praktisch mit dieser identisch werden. Damit läßt sich dann nachweisen, daß die kritische Knicklast (gewonnen aus der Konvergenzbedingung der Reihe der aufeinanderfolgenden Ausbiegungen) in jedem Falle von der Form und Größe der Anfangsausbiegung unabhängig und beim beiderseits gelenkig gelagerten Stab gleich der zugehörigen Eulerschen Knicklast ist:

$$P_k = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots (1)$$

Diese Aussage gilt auch für den Fall, daß die Anfangsausbiegung durch eine Querbelastung – etwa durch Eigengewicht – hervorgerufen ist.

Derselbe Beweis läßt sich auch auf mathematischem Wege liefern für jede beliebige Anfangsexzentrizität, die man durch eine Folge von Sinusfunktionen mit verschiedener Frequenz und Pfeilhöhe ersetzen kann.

Die größte Endausbiegung in Stabmitte ist nicht gänzlich unabhängig von der Form der Anfangsausbiegung. Sie kann jedoch immer genau genug

$$y \sim f_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} \dots \dots \dots (2b)$$

angeschrieben werden. f_0 bedeutet hierbei die Anfangsausbiegung in Stabmitte.

In dem ungünstigen Fall einer gleichmäßig über die ganze Stablänge verteilten Anfangsexzentrizität ergibt sich bei 10facher theoretischer Knicksicherheit eine um 3% und bei 3facher Knicksicherheit eine um 8% größere Endausbiegung als bei sinusförmiger Anfangsausbiegung. Da die „baupraktisch unvermeidbare Außermittigkeit des Kraftangriffs“ meist auf einer rohen Schätzung beruht, ist die Ungenauigkeit der Formel (2b) nicht von Bedeutung.

C. Knicklast und Endausbiegung beim beiderseits gelenkig gelagerten Druckstab mit elastischer Querstützung längs der ganzen Stabachse

Der Stab habe eine spannungslose sinusförmige Anfangsausbiegung von der Form und Größe $y_0 = f_0 \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x$ und sei längs der ganzen Stabachse durch elastische Kräfte $p = c \cdot b \cdot \eta$ gestützt. Hierbei sei:

c = spezifische Federkonstante = Bettungsziffer (kg/cm³)

b = Pfahlbreite (cm)

η = Summe der zusätzlichen Ausbiegungen (cm).

Infolge des durch Aufbringen der Last P entstehenden Anfangsmomentes will sich der Stab – wie in B gezeigt – sinusförmig ausbiegen und ruft damit zunächst sinusförmige Stützwiderstände hervor. Dadurch kann die erste zusätzliche Ausbiegung nicht die volle Größe erreichen wie beim ungestützten Stab.

Infolge einer sinusförmigen Belastung entsteht bei einem beiderseits gelenkig gelagerten Stab eine sinusförmige Ausbiegung

$$\delta = -\frac{p_{\max}}{E \cdot J} \cdot \iiint \sin \frac{\pi}{l} \cdot x \, dx^4 = \frac{f_{\max}}{E \cdot J} \cdot \frac{l^4}{\pi^4} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Mit

$$p_{\max} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x = c \cdot b \cdot y_1$$

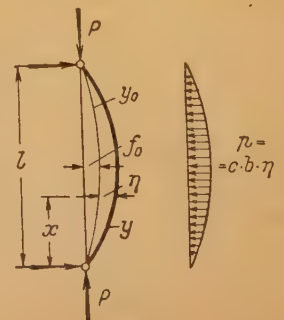


Abb. 2.

wird die erste zusätzliche Ausbiegung:

$$y_1 = f_0 \cdot \frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x - \frac{c \cdot b \cdot y_1}{E \cdot J} \frac{l^4}{\pi^4},$$

$$y_1 = f_0 \frac{P \cdot l^2}{E \cdot J \cdot \pi^2 \left(1 + \frac{c \cdot b \cdot l^4}{E \cdot J \cdot \pi^4}\right)} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x = f_0 C \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Auf dieselbe Art erhält man die n te zusätzliche Ausbiegung:

$$y_n = f_0 C^n \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Die Endausbiegung wird:

$$y = f_0 (1 + C + C^2 + C^3 + \dots C^n + \dots) \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x.$$

Aus der Konvergenzbedingung der Reihe $C < 1$ erhält man die kritische Knicklast:

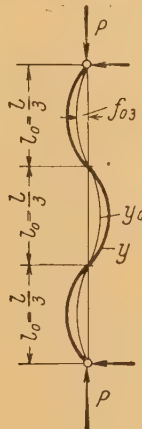
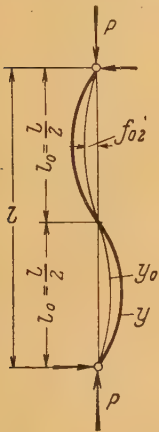
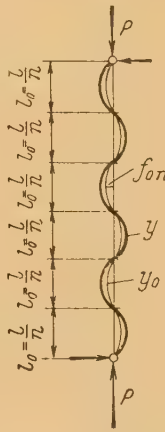


Abb. 3.



$$P_k = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} l^2 \dots (5)$$

Die Endausbiegung wird wiederum:

$$y = f_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x \dots (2)$$

Nimmt man nun an, daß die Anfangsexzentrizität des betrachteten Knickstabes nicht aus einer einzigen, sondern aus mehreren sinusförmigen Halbwellen bestehe, so tritt auch in diesem Falle durch das Aufbringen der Last P eine Vergrößerung der sinusförmigen Anfangsexzentrizität ein, wodurch wiederum sinusförmige Stützwiderstände wachgerufen werden. Bei rein sinusförmiger Anfangsausbiegung bleibt nach dem Eintreten

der Belastung die Zahl der sinusförmigen Halbwellen erhalten. Nach derselben Ableitung wie oben ergibt sich bei einer Anfangsausbiegung von n sinusförmigen Halbwellen die kritische Knicklast allgemein zu:

$$P_{kn} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} \left(\frac{l}{n}\right)^2 = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l_0^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} l_0^2 = P_E + P_{St} \dots (5a)$$

Die kritische Knicklast setzt sich aus den beiden Teilen P_E und P_{St} zusammen. P_E stellt den aus der Eigensteifigkeit des Stabes herrührenden und P_{St} den durch die elastischen Stützkkräfte verursachten Anteil an der Gesamtknicklast dar. P_E nimmt mit zunehmender Größe von l_0 quadratisch ab und P_{St} nimmt mit wachsendem l_0 quadratisch zu. Die Gesamtknicklast hat ein eindeutiges Minimum für $l_0 = l_{0k}$

$$\frac{d P_{kn}}{d l_0} = 0 = -\frac{2 \cdot E \cdot J \cdot \pi^2}{l_{0k}^3} + \frac{2 \cdot c \cdot b \cdot l_{0k}}{\pi^2}$$

$$l_{0k} = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J}{c \cdot b}} \dots (6)$$

Setzt man die kritische Knicklänge l_{0k} in P_{kn} ein, so erhält man:

$$P_{kmin} = 2 \sqrt{E \cdot J \cdot c \cdot b} = 2 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l_{0k}^2} = 2 \cdot \frac{c \cdot b}{\pi^2} \cdot l_{0k}^2 \dots (7)$$

Die Mindestknicklast P_{kmin} ergibt sich unabhängig von der Anzahl der Halbwellen der Anfangsausbiegung stets in gleicher Größe, sobald $l_0 = l_{0k}$ wird. Wie sich aus Gl. (7) ergibt, ist für P_{kmin} der aus der Eigensteifigkeit des Stabes und der durch den Stützwiderstand verursachte Anteil an der Gesamtknicklast gleich groß.

In Abb. 4 ist für einen Druckstab mit einer sinusförmigen Anfangsausbiegung von 1, 2, 3 usw. Halbwellen die Knicklast bzw. das Verhältnis P_k/P_{kmin} dargestellt in Abhängigkeit von dem Verhältnis der Gesamtablänge l zur kritischen Knicklänge l_{0k} .

Bei sinusförmiger Anfangsausbiegung in einer Halbwellen stellt sich die Knicklastkurve I ein. Für $l = 0$ ist die Knicklast unendlich groß. Mit zunehmender Stablänge fällt der Wert der Knicklast sehr rasch ab und erreicht bei $l = 1 \cdot l_{0k}$ den Mindestwert P_{kmin} . Bei weiter anwachsender Stablänge nimmt die Knicklast

infolge des überhandnehmenden Einflusses des Stützwiderstandes rasch wieder zu und kann für $l = \infty$ theoretisch den Wert $P_k = \infty$ erreichen.

Bei sinusförmiger Anfangsausbiegung in zwei Halbwellen zeigt sich ein ganz ähnliches Bild. Auch die Kurve II fällt mit wachsender Stablänge zunächst rasch ab. Sie erreicht ihren Kleinstwert $P_k = P_{k\min}$ an der Stelle $l = 2 \cdot l_{0k}$ und steigt dann wieder an.

Auch die Kurven für 3 und 4 Halbwellen verlaufen ähnlich. Der Kleinstwert sämtlicher Kurven ist unabhängig von der Anzahl der Halbwellen und liegt auf der Geraden $P/P_{k\min} = 1$. Für verschiedene Halbwellenzahlen liegt der Kleinstwert der Knicklast nacheinander an den Stellen $m = 1, m = 2, m = 3$ usw., d. h. $P_{k\min}$ stellt sich jeweils dann ein, wenn die Halbwellenlänge der sinusförmigen Anfangsausbiegung l_0 gleich der kritischen Knicklänge l_{0k} wird.

Sämtliche Kurven I, II, III usw. steigen nach Erreichen des Kleinstwertes wieder an, und für $l = \infty$ könnte die Knicklast elastisch gestützter Stäbe theoretisch unendlich groß werden, wenn die Anfangsausbiegung aus einer endlichen Zahl rein sinusförmiger Halbwellen bestünde. Bei Druckstäben der Baupraxis liegt jedoch niemals rein sinusförmige Anfangsexzentrizität vor. Die zufällig vorhandene Anfangsexzentrizität hat immer unregelmäßige Gestalt. Es läßt sich jedoch jede beliebige Form der Anfangsexzentrizität als Überlagerung einer Summe von Sinuslinien verschiedener Frequenz und verschiedener Pfeilhöhe auffassen.

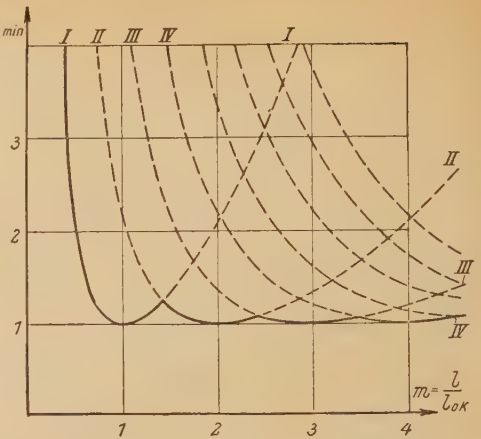


Abb. 4.

Sämtliche Kurven I, II, III usw. steigen nach Erreichen des Kleinstwertes wieder an, und für $l = \infty$ könnte die Knicklast elastisch gestützter Stäbe theoretisch unendlich groß werden, wenn die Anfangsausbiegung aus einer endlichen Zahl rein sinusförmiger Halbwellen bestünde. Bei Druckstäben der Baupraxis liegt jedoch niemals rein sinusförmige Anfangsexzentrizität vor. Die zufällig vorhandene Anfangsexzentrizität hat immer unregelmäßige Gestalt. Es läßt sich jedoch jede beliebige Form der Anfangsexzentrizität als Überlagerung einer Summe von Sinuslinien verschiedener Frequenz und verschiedener Pfeilhöhe auffassen.

$$y_0 = f_{01} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot x + f_{02} \cdot \sin \frac{2\pi}{l} \cdot x + f_{03} \cdot \sin \frac{3\pi}{l} \cdot x + \dots \\ + f_{0n} \sin \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x + \dots f_{0r} \sin \frac{r \cdot \pi}{l} \cdot x.$$

Unter sinngemäßer Anwendung der Gl. (2) läßt sich für eine solche beliebige Anfangsexzentrizität die Endausbiegung anschreiben zu:

$$y = \sum_{n=1}^{n=r} f_{0n} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kn}}} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x \dots \dots \dots (2a)$$

Dabei bedeutet P die Gebrauchslast, mit der der Stab belastet wird, und P_{kn} die einem Stab von der Länge l bei Annahme einer sinusförmigen Anfangsausbiegung von n Halbwellen zugeordnete Knicklast

$$P_{kn} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2 \dots \dots \dots (5a)$$

Betrachtet man die obige Summenformel (2a) für die Endausbiegung bei beliebiger Anfangsexzentrizität, so zeigt sich, daß diejenige Einzel-Anfangsausbiegung $y_{0n} = f_{0n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x$ am raschesten gegen unendlich

anwächst, für die der Wert $\frac{P}{P_{kn}}$ zuerst gleich 1 wird. Nach Formel (5a) ergibt sich nun bei gegebener Stablänge für jede Halbwellenzahl eine eindeutige Knicklast P_{kn} . (Siehe auch Diagramm auf Abb. 4.) Es ist beispielsweise für $l = 2 l_{0k}$ die Knicklast mit zunehmender Halbwellenzahl: $P_{k1} = 2,13 P_{k\min}$; $P_{k2} = 1,00 P_{k\min}$; $P_{k3} = 1,34 P_{k\min}$; $P_{k4} = 2,13 P_{k\min}$ usw. Bei gegebener Stablänge und wachsender Gebrauchslast P wird derjenige Wert $\frac{P}{P_{kn}}$ am ehesten gleich 1, der zu dem kleinsten Wert von P_{kn} , in obigem Falle also zu dem Wert P_{k2} , gehört. Dies bedeutet, daß ein Stab mit beliebiger Anfangsexzentrizität mit derjenigen Wellenzahl ausknickt, der die kleinste mögliche Knicklast zugeordnet ist. Diese Aussage gilt unabhängig von der Größe der Pfeilhöhe f_{0n} der sich überlagernden Sinuswellen, da bereits eine ganz geringe Anfangsexzentrizität von Bruchteilen von Millimetern genügt, um den Knickvorgang einzuleiten. Ergibt sich die kleinste Knicklast zufällig im Schnittpunkt zweier Knicklastlinien mit um eins verschiedener Frequenz (s. Abb. 4), so knickt der Stab mit derjenigen Zahl von Halbwellen aus, der der größere Anfangspfeil zugeordnet ist. Für einen Druckstab mit beliebiger Anfangsexzentrizität, die als Überlagerung eine Folge von Sinuswellen verschiedener Frequenz und Pfeilhöhe gedacht werden kann, ergibt sich die praktische Knicklast nach der in Abb. 4 stark ausgezogenen Knickgirlande. Da der betrachtete Stab an beiden Enden festgehalten ist, muß sich stets eine ganze Zahl von Halbwellen ausbilden. Die Unstetigkeitsstellen der Knickgirlande entstehen dort, wo sich die Wellenzahl bei zunehmender Stablänge um jeweils eine Halbwelle erhöht. Der untere Teil der Knickgirlande kann mit guter Annäherung durch die Gerade $P_k = P_{k\min}$ ersetzt werden.

Die hier geschilderten Gesetzmäßigkeiten wurden bereits von Engeßer⁶⁾ erkannt und durch Versuche bestätigt.

Für Pfähle, die auf ihre ganze Länge elastisch quergestützt sind, ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß bei gegebener elastischer Stützung von einer bestimmten Pfahllänge $a b$, $l = l_0 k$ = kritische Knicklänge, die Knicklast mit weiter zunehmender Pfahllänge nicht mehr abnimmt wie bei freien Druckstäben, sondern praktisch konstant bleibt.

Die größte Randspannung des Druckstabes ergibt sich wiederum aus der Überlagerung der Druck- und Biegespannungen. Bei der Ermittlung des für die Biegespannung maßgebenden Momentes ist der abmindernde Einfluß der quergereichten Stützkkräfte zu berücksichtigen. Es ist

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W} \quad (3)$$

Hat der Stab eine sinusförmige Anfangsexzentrizität von einer Halbwelle, so ist nach Aufbringen der Gebrauchslast das Größtmoment in Wellenmitte:

$$M_{\max} = P \cdot y_{\max} - c \cdot b \cdot (y_{\max} - f_{01}) \frac{l^2}{\pi^2}, \quad (8)$$

$$y_{\max} = f_{01} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} \quad (2a)$$

Allgemein ergibt sich für eine beliebige Anfangsausbiegung, die sich aus der Überlagerung einer Folge von Sinuslinien verschiedener Frequenz und Pfeilhöhe zusammensetzt, das Moment an beliebiger Stelle ebenfalls als eine Überlagerung einer Summe von Sinusfunktionen:

$$M_x = \sum_{n=1}^{n=r} \left[P \cdot y_n - c \cdot b \cdot (y_n - f_{0n}) \cdot \frac{l^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right] \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x \quad (8a)$$

Hierin ist:

l = Gesamtstablänge

n = Halbwellenzahl der betrachteten Sinuslinie

f_{0n} = Anfangspfeil der betrachteten Sinuslinie

y_n = Endpfeil der betrachteten Sinuslinie infolge der Belastung durch P

$$y_n = f_{0n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kn}}}$$

$$P_{kn} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} \left(\frac{l}{n}\right)^2 = \text{Knicklast der betrachteten Sinuslinie.}$$

Wie bereits oben dargelegt wurde, wächst diejenige Sinuswelle am raschesten an, der die kleinste Knicklast P_{kn} zugeordnet ist. Es bildet sich die „typische Knickbiegeline“ aus. Wie sich leicht einsehen läßt, wächst damit auch das Biegemoment in Wellenmitte dieser typischen Knickbiegeline am raschesten an. Durch Vergleichsrechnung (s. auch Beispiel 2, Seite 62–64) läßt sich zeigen, daß demgegenüber die den übrigen Sinuswellen zugehörigen Momente meist unbedeutend sind und vernachlässigt werden können. Da die genaue Form der Anfangsexzentrizität vielfach unbekannt ist und geschätzt werden muß, genügt es, eine Anfangsexzentrizität im Sinne der typischen Knickbiegeline anzunehmen, um sich einen Überblick über die Größenordnung der zu erwartenden größten Randspannungen zu verschaffen. Berücksichtigt man nur das zur typischen Knickbiegeline gehörende Moment, so kann man auch im Allgemeinfall wieder die Formeln (8) und (2a) verwenden, wenn man in Formel (2a) die kleinste mögliche Knicklast P_{kn} und in Formel (8) die der kleinsten Knicklast zugeordnete Halbwellenlänge einsetzt.

D. Einfluß der Anfangsexzentrizität auf die Knicksicherheit

Errechnet man die größte Randspannung nach der Gleichung $\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$, so ergibt sich die Sicherheit gegen Bruch oder unzulässige Verformung nicht ohne weiteres durch Vergleich von σ mit der Spannungshöchstgrenze des Baustoffes, da die Endausbiegung und damit auch das Biegemoment nicht linear mit zunehmender Last P , sondern rascher anwächst. (Superpositions-gesetz gilt nicht bei wachsendem P .) Die tatsächliche Sicherheit erhält man nur durch Vergleich der Gebrauchslast P mit der sogenannten Traglast. Die Traglast P_T ist dabei diejenige Grenzlast, die ein Druckstab mit einer bestimmten vorgegebenen Anfangsexzentrizität erreichen kann, wenn die größte Randspannung in der meistbeanspruchten Faser gerade an die durch das vorliegende Baumaterial gegebene Spannungshöchstgrenze herankommt. Bei Holz und Beton

⁶⁾ Engeßer, Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des seitlich gestützten Stabes. Eisenbau 1918, Heft 2, S. 28.

ist diese Spannungshöchstgrenze identisch mit der Bruchspannung; bei Stahl ist es die Fließ- bzw. Quetschgrenze, da bei höherer Beanspruchung unzulässig große Verformungen eintreten. Dabei wird auf Grund der Versuche des Deutschen Stahlbau-Verbandes⁷⁾ angenommen, daß die Spannungsdehnungslinie praktisch bis an die Fließgrenze dem Hookeschen Gesetz folgt. Für Holz und Beton wird ebenfalls die übliche vereinfachende Annahme gemacht, daß der Elastizitätsmodul bis zur Bruchgrenze konstant sei. Auf Grund der in den beiden vorausgegangenen Abschnitten entwickelten Beziehungen ist es möglich, den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Anfangsexzentrizität und Traglast herzustellen. Es sei:

$$\varepsilon = \frac{f_0}{k} = \frac{\text{Anfangsexzentrizität}}{\text{Kernweite}}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \text{Spannungshöchstgrenze des Baumaterials} \\ &= \text{Fließgrenze bei Stahl} \\ &= \text{Bruchgrenze bei Holz und Beton.}\end{aligned}$$

Unter Benutzung obiger Ausdrücke und der Gl. (1), (2a), (3) und (4) erhält man die Traglastspannung des ungestützten Stabes, das ist die der Traglast zugeordnete mittlere Spannung $\frac{P_T}{F}$:

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\max} + \sigma_E (1 + \varepsilon) - \sqrt{[\sigma_{\max} + \sigma_E (1 + \varepsilon)]^2 - 4 \sigma_E \cdot \sigma_{\max}} \right\}. \quad \dots \quad (9)$$

Hierbei ist:

$$\sigma_E = \frac{E \cdot \pi^2}{\lambda^2} = \text{Knickspannung nach Euler}$$

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{\text{Knicklänge}}{\text{Trägheitsradius}} = \text{Schlankheitsgrad.}$$

Die Traglast ist $P_T = \sigma_T \cdot F$ = Traglastspannung mal Stabquerschnitt.

Für den elastisch gestützten Stab erhält man unter Benutzung der Gl. (5), (2a), (3) und (8)

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \left[\sigma_{\max} + \sigma_k + \varepsilon \cdot \sigma_E - \sqrt{(\sigma_{\max} + \sigma_k + \varepsilon \cdot \sigma_E)^2 - 4 \sigma_k \cdot \sigma_{\max}} \right]. \quad \dots \quad (10)$$

Hierbei ist:

$$\sigma_k = \sigma_E + \sigma_{st} = \frac{E \cdot \pi^2}{\lambda^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} \frac{l^2}{F} = \frac{P_k}{F}.$$

Beschränkt man sich auf die Betrachtung derjenigen Fälle, bei denen die Länge des gestützten Stabes gleich oder ein Vielfaches der kritischen Knicklänge $l_{0k} = \pi \sqrt{\frac{E \cdot J}{c \cdot b}}$ ist, so wird $\sigma_k = 2 \sigma_E$ und damit:

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{\max} + \sigma_E (2 + \varepsilon) - \sqrt{[\sigma_{\max} + \sigma_E (2 + \varepsilon)]^2 - 8 \sigma_E \cdot \sigma_{\max}} \right\}. \quad \dots \quad (10a)$$

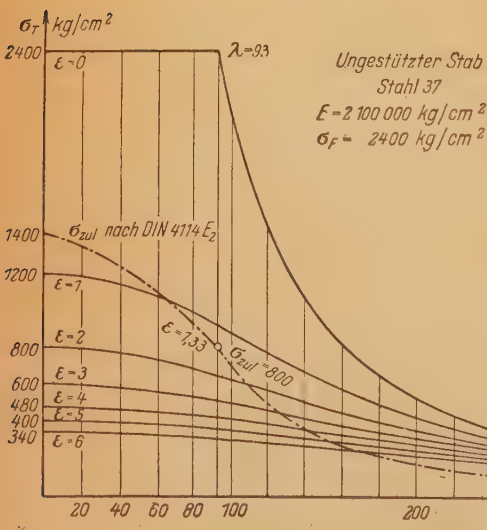


Abb. 5a. Traglastspannung bei verschiedener Anfangsexzentrizität in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad.

Bei der Berechnung von σ_E ist dann zu beachten, daß an Stelle der Stablänge die kritische Knicklänge l_{0k} gesetzt werden muß

$$\sigma_E = \frac{E \cdot \pi^2}{\lambda_{0k}^2} \quad \lambda_{0k} = \frac{l_{0k}}{i} = \text{ideeller Schlankheitsgrad.}$$

Mit Hilfe der Formeln (9) und (10a) wurden die Traglastspannungen für einen Stahldruckstab mit einer Fließgrenze bei $\sigma_F = 2400 \text{ kg/cm}^2$ und einem Elastizitätsmodul von $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ sowie für einen Betondruckstab mit einer Bruchspannung von $\sigma_B = 300 \text{ kg/cm}^2$ und einem Elastizitätsmodul von $E = 140000 \text{ kg/cm}^2$ in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad λ bzw. λ_{0k} für verschiedene Werte ε errechnet und in den Abb. 5a u. 5b sowie 6a u. 6b dargestellt.

Die in diesen Abbildungen eingetragenen Kurvenzüge für $\varepsilon = 0$ stellen die theoretisch möglichen Traglastspannungen unter der Voraussetzung vollkommen gerader und zentrisch belasteter Stäbe dar. Die Kurvenzüge $\varepsilon = 0$ werden gebildet durch die Knickspannungshyperbel und durch die Linie der Span-

⁷⁾ Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Heft 4, Berlin 1934, Springer-Verlag.

nungshöchstgrenze, das ist die Linie der Fließgrenze bei Stahl und der Bruchspannung bei Beton. Die den amtlichen Bestimmungen zugrunde liegenden Knicksicherheitszahlen beziehen sich immer auf den vollkommen geraden, zentrisch belasteten Stab.

Die für verschiedene Werte von ε dargestellten Kurvenscharen zeigen eindeutig, daß die Traglast in der Praxis sowohl bei ungestützten als auch bei gestützten Stäben weitgehend von der Größe der Anfangsexzentrizität abhängt. Dabei ergibt sich die zunächst unermutete Tatsache, daß der durch die Anfangsexzentrizität verursachte relative Abfall der Traglast im Bereich kleiner Knicklängen wesentlich größer ist als im Bereich großer Knicklängen.

Im Diagramm des ungestützten Stahlstabes (Abb. 5a) wurde außerdem die Linie der nach DIN 4114 Entwurf 2 zulässigen Dimensionierungsspannungen eingetragen. Diese Linie der σ_{zul} entspricht einer 1,7 bis 3fachen Sicherheit gegenüber der Fließgrenze und einer mindestens 3fachen Sicherheit gegenüber der theoretischen Knickspannung bei $\varepsilon = 0$. Eine den gleichen Sicherheitsfaktoren entsprechende Linie σ_{zul} wurde in das Diagramm des gestützten Stabes (Abb. 5b) eingetragen. An Hand dieser Linien kann die bei jedem Schlankheitsgrad für die Dimensionierung zulässige Spannung abgelesen werden. Aus der Lage der Dimensionierungsspannungslinien in den Diagrammen ergibt sich außerdem, welche Anfangsexzentrizität im Höchstfalle vorhanden sein darf, wenn die im Druckstab auftretende größte Randdruckspannung die Fließgrenze $\sigma_F = 2400 \text{ kg/cm}^2$ nicht überschreiten soll.

In den Diagrammen des Betondruckstabes (Abb. 6a u. 6b) wurden Spannungslinien eingetragen, die einer gleichmäßigen 3fachen Sicherheit gegenüber der Bruchspannung und gegenüber der theoretischen Knickspannung entsprechen. An Hand dieser Linien kann ebenfalls abgelesen werden, in welchem Spielraum sich die Anfangsexzentrizität höchstens bewegen darf, wenn die größte Randspannung die Bruchspannung nicht überschreiten soll.

In Abb. 7 wurden nun die max Anfangsexzentrizitäten aufgetragen, die bei Dimensionierung gemäß den nach DIN 4114 Entwurf 2 für Stahl vorgesehenen Sicherheitsfaktoren und bei 3facher Sicherheit gegen Bruch und zentrische Knickung bei Beton 300 im äußersten Falle auftreten dürfen, wenn die größte Randspannung an keiner Stelle die Spannungshöchstgrenze, das ist die Fließ- bzw. Bruchspannung überschreiten soll.

Die höchstzulässige Anfangsexzentrizität $\varepsilon = \frac{f_0}{k}$ ist dargestellt in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad $\lambda = \frac{l}{i}$.

beim ungestützten bzw. vom ideellen Schlankheitsgrad $\lambda_{0k} = \frac{l_{0k}}{i}$ beim elastisch gestützten Stab. l_{0k} bedeutet

hierbei die kritische Knicklänge des gestützten Stabes gemäß Formel (6). Entsprechend den oben gemachten Voraussetzungen beziehen sich die für den gestützten Stab aufgetragenen Kurven auf solche Stäbe, deren Länge gleich oder ein ganzzahliges Vielfaches der kritischen Knicklänge l_{0k} ist. Für elastisch gestützte Stäbe mit beliebiger Stablänge kann bei gegebener Dimensionierungsspannung $\sigma_{zul} = \sigma_F$ die höchstzulässige Anfangsexzentrizität ε mit Hilfe der Formel (10) berechnet werden. Es ergeben sich hierbei jedoch keine grundsätzlich von Abb. 7 abweichenden Ergebnisse.

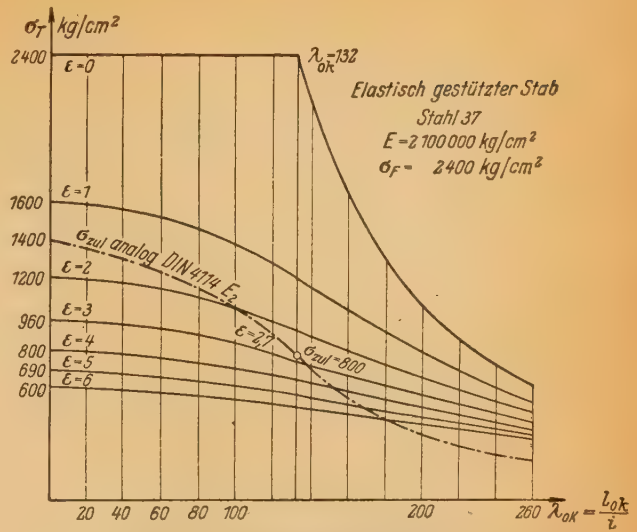


Abb. 5b. Traglastspannung bei verschiedener Anfangsexzentrizität in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad.

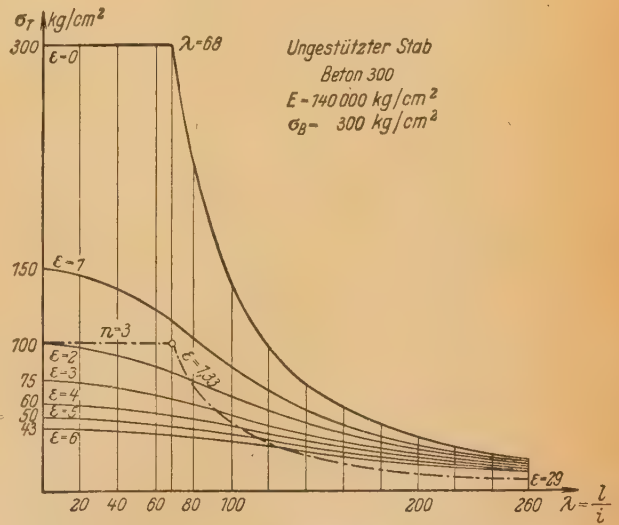


Abb. 6a. Traglastspannung bei verschiedener Anfangsexzentrizität in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad.

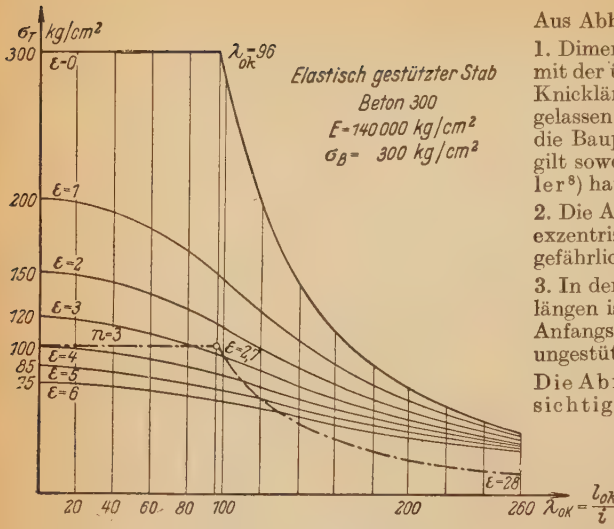


Abb. 6b. Traglastspannung bei verschiedener Anfangsexzentrizität in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad.

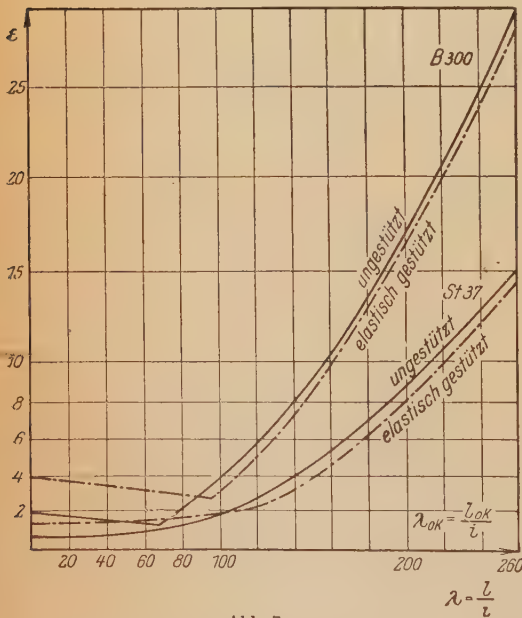


Abb. 7.

sitzen des Rohrrandes erfolgt. Wie später gezeigt wird, ist das Ausbetonieren der Hohlrohre auch deshalb notwendig, um die Fläche des Pfahlfußes zu vergrößern, da sonst die vom Pfahl aufnehmbare Last nicht ausgenutzt werden kann.

E. Rechnerische Ermittlung der Knicklast bei teilweise elastisch gestützten Druckstäben

Die vorausgegangenen Betrachtungen bezogen sich auf gänzlich ungestützte Druckstäbe und auf solche, die auf ihre ganze Länge durch kontinuierliche elastische Kräfte mit gleichbleibendem Elastizitätsmaß gestützt sind. Bei Pfahlböcken, deren Pfähle nur mit dem unteren Teil im Boden und mit dem oberen Teil frei oder im Wasser stehen, kann nun auch der Fall des nur teilweise gestützten Druckstabes vorliegen.

Aus Abb. 7 ergibt sich eindeutig:

1. Dimensioniert man einen Stahl- oder Betondruckstab mit der üblichen Sicherheit, so kann bei Stäben mit großer Knicklänge eine relativ große Anfangsexzentrizität zugelassen werden, die immer größer sein wird, als die durch die Baupraxis bedingten Herstellungsgenauigkeiten. Dies gilt sowohl für ungestützte als für gestützte Stäbe. (Möhler⁸⁾ hat dasselbe für ungestützte Holzstäbe gezeigt.)

2. Die Abminderung der Tragkraft infolge der Anfangsexzentrizität ist vor allem im Bereich kleiner Knicklängen gefährlich.

3. In dem besonders gefährlichen Bereich kleiner Knicklängen ist bei elastisch quergestützten Stäben der für die Anfangsexzentrizität zulässige Spielraum größer als bei ungestützten Stäben oder – anders ausgedrückt:

Die Abminderung der Tragkraft infolge unbeachteter Anfangsexzentrizität ist in dem gefährlichen Bereich kleiner Knicklängen bei elastisch gestützten Stäben kleiner als bei ungestützten. Diese letzte Erkenntnis ist von Bedeutung in bezug auf die Anwendung auf elastisch gestützte Pfähle.

Es wird daher vorgeschlagen, bei fabrikmäßig hergestellten, geraden, elastisch quergestützten Pfählen die Sicherheit im Normalfall genau

so festzulegen, wie in den bewährten amtlichen Vorschriften für ungestützte Druckstäbe vorgesehen ist. Den in DIN 4114 Entwurf 2 vorgesehenen ω -Werten entspricht eine 1,7- bis 3fache Sicherheit gegenüber der Fließgrenze und 3fache Sicherheit gegenüber der theoretischen Knickspannung des geraden Stabes ohne Anfangsexzentrizität. Bei Beton und Holz ist durchschnittlich 3-4fache Sicherheit gegenüber der Bruchspannung und der theoretischen Knickspannung vorgesehen. Bei Verwendung dieser Sicherheitszahlen ist in dem gefährlichen Bereich kleiner Knicklängen bei gleicher ungewollter Anfangsexzentrizität die tatsächliche Sicherheit bei elastisch quergestützten Druckstäben größer als bei ungestützten.

An Hand der Formeln (9), (10), (10a) ist es jedoch ohne Schwierigkeit möglich, auch bei ausgefallen großer Anfangsexzentrizität, wie sie etwa bei krummen Holzpfählen auftreten kann, die Traglast zu berechnen und die Gebrauchslast durch Abminderung mit einem angemessenen Sicherheitsfaktor festzulegen.

Es sei in diesem Zusammenhang noch darauf hingewiesen, daß für die Größe der Endausbiegung und damit der größten Randspannung nicht so sehr die Anfangsexzentrizität an den Enden des Druckstabes als diejenige in Wellenmitte maßgebend ist. Bei Hohlpfählen, die ohne Spitze eingebracht werden und die auf Fels aufstehen, wird es sich allerdings immer empfehlen, die Pfähle nachträglich auszubetonieren, damit die Lastübertragung einigermaßen zentrisch und nicht durch einseitiges Auf-

⁸⁾ Möhler, Tragkraft und Querkraft von Holzdruckstäben. Dissertation, Karlsruhe 1941/42.

Die Autoren, die sich bisher mit kontinuierlich elastisch gestützten Stäben befaßten – Engeßer⁴⁾, Zimmermann⁹⁾, Kayser¹⁰⁾, Chwalla¹¹⁾ –, betrachten nur den auf seine ganze Länge elastisch gestützten Stab und berücksichtigen lediglich die verschiedene Festhaltung der Stabenden. So behandelt Chwalla den kontinuierlich gestützten Stab, bei dem die frei drehbaren Stabenden wahlweise, seitlich unverschieblich, seitlich frei und seitlich durch Einzelkräfte elastisch verschieblich festgehalten sind. Er geht dabei von der Gleichung des Gleichgewichts der Kräfte unter Berücksichtigung der durch die Ausbiegung des Stabes hervorgerufenen Stützkkräfte – einer Differentialgleichung 4ter Ordnung – aus und berücksichtigt die verschiedene Lagerung der Stabenden durch die Randbedingungen. Dabei gelingt es ihm, geschlossene Lösungskurven zu finden. Für den hier vorliegenden Lastfall ist jedoch wegen der Unstetigkeit des Stützwiderstandes innerhalb der Stablänge eine geschlossene mathematische Lösung, bei der sich die Knicklast als Funktion des Stützwiderstandes und der Stützlänge ergibt, nicht zu erwarten.

Eine ganze Reihe von Autoren – Zimmermann¹²⁾, Müller-Breslau¹³⁾, Bleich¹⁴⁾, Schleusner¹⁵⁾, Kriso¹⁶⁾, Lühr¹⁷⁾ – haben sich mit dem punktwise elastisch gestützten Stab befaßt und dafür Lösungsmethoden entwickelt. Grundsätzlich kann das Problem des elastisch teilgestützten Stabes mit diesen Methoden behandelt werden, wenn man an Stelle der kontinuierlichen Stützung eine Stützung in mehreren Einzelpunkten annimmt. Man gewinnt dabei allerdings nur Einzelösungen, das heißt es muß für jeden angenommenen Lastfall die gesuchte Knicklast in einem besonderen Rechnungsgang ermittelt werden. Die genannten Verfahren erfordern in jedem Einzelfall eine außerordentlich umfangreiche Rechenarbeit und sind in ihrem mathematisch-mechanischen Zusammenhang wenig anschaulich.

Zur Lösung des vorliegenden Problems wurden daher die nachstehend beschriebenen Methoden schrittweiser Näherung angewandt. Auch dabei wurden nur Einzellösungen gefunden. Die benutzten Verfahren haben jedoch den Vorzug, verhältnismäßig anschaulich zu sein.

Vianello geht bei seinem bekannten Verfahren¹⁸⁾ von der Tatsache aus, daß für den ursprünglich geraden Stab im Falle der Grenzbelastung durch die Knicklast neben der geraden Gleichgewichtsform unendlich viele affine ausgebogene Gleichgewichtslagen möglich sind, bei denen Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren Kräften herrscht. Wenn es gelingt, eine ausgebogene Stabform zu finden, die sich bei einer gegebenen äußeren Druckbelastung nicht mehr ändert, so ist die gegebene äußere Last gleich der Knicklast. Für die Ermittlung der Knicklast genügt es bereits, eine solche Form der Ausbiegung zu finden, die bei gegebener Belastung eine affine Biegelinie erzeugt. Die Knicklast ergibt sich dann, indem man die zur Ableitung der letzten Biegelinie benutzte Druckkraft im Verhältnis der Größtordinaten oder der Flächeninhalte der beiden auseinander abgeleiteten affinen Biegelinien vergrößert bzw. verkleinert.

Für die Ermittlung zweier aufeinanderfolgender affiner Biegelinien benutzte Vianello die von ihm gefundene Erfahrungstatsache, daß bei Annahme einer ersten Ausbiegung von beliebiger Gestalt die daraus wiederholt abgeleiteten aufeinanderfolgenden Biegelinien sich sehr rasch der dem Druckstab zugehörigen typischen Knickbiegelinie nähern.

Dieselben Folgerungen, die Vianello aus der Betrachtung der Gleichgewichtsform des ursprünglich geraden Stabes zieht, lassen sich sehr anschaulich für einen Stab mit ganz beliebiger Anfangsexzentrizität ableiten.

Die unendliche Reihe für die Endausbiegung eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes läßt sich folgendermaßen anschreiben:

$$y = \varphi_0 \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{P}{P_k} \cdot \varphi_1 \left(\frac{x}{l} \right) + \left(\frac{P}{P_k} \right)^2 \cdot \varphi_2 \left(\frac{x}{l} \right) + \dots + \left(\frac{P}{P_k} \right)^n \cdot \varphi_n \left(\frac{x}{l} \right) + \left(\frac{P}{P_k} \right)^{n+1} \cdot \varphi_{n+1} \left(\frac{x}{l} \right).$$

⁹⁾ Zimmermann, Die Knickfestigkeit des Stabes mit elastischer Querstützung. Berlin 1906, Wilh. Ernst & Sohn.

¹⁰⁾ Kayser, Druckgurte offener Brücken. Ztrbl. d. Bauverwaltung 1909, Heft 6, 52, 94, S. 45, 349, 611.

¹¹⁾ Chwalla, Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes. ZAMM 1927, Heft 4, S. 276. – Die Seitensteifigkeit offener Parallel- und Trapezträgerbrücken. Bauingenieur 1929, Heft 25, S. 443.

¹²⁾ Zimmermann, Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken. Berlin 1910, Wilh. Ernst & Sohn.

¹³⁾ Müller-Breslau, Graphische Statik, II. Bd., 2. Teil. Leipzig 1908, Alfred Kröner.

¹⁴⁾ F. u. H. Bleich, Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktwise elastisch gestützten Stabes. Stahlbau 10 (1937), Heft 3 u. 4, S. 17 u. 28.

¹⁵⁾ Schleusner, Die Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes. Forschungsheft I aus dem Gebiet des Stahlbaues. Berlin 1938, Springer-Verlag.

¹⁶⁾ Kriso, Abhandlungen der I. V. B. H., Bd. III. Zürich 1935; desgleichen Bd. IV. Zürich 1936, Verlag Leemann. – Kriso, Ein Rechengeschema zur Knickberechnung mehrfeldriger, beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele. Stahlbau 14 (1941), Heft 25/26, S. 117, u. 15 (1942), Heft 1/3, S. 5.

¹⁷⁾ Lühr, Die Knicksicherheit des elastisch gestützten Druckstabes. Dissertation Karlsruhe 1946–1948.

¹⁸⁾ Vianello, Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe. ZVDI 1898, Heft 52, S. 1436.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die aufeinanderfolgenden zusätzlichen Ausbiegungen unabhängig von Form und Größe der Anfangsausbiegung rasch einander ähnlich werden und schließlich von einer bestimmten Stelle n ab praktisch affin sind. Dabei wird dann der Funktionswert $\varphi_n \left(\frac{x}{l} \right)$ gleich $\varphi_{n+1} \left(\frac{x}{l} \right)$.

Aus den beiden aufeinanderfolgenden Biegelinien

$$y_n = F_n \left(\frac{x}{l} \right) = \left(\frac{P}{P_k} \right)^n \cdot \varphi_n \left(\frac{x}{l} \right) \quad \text{und} \quad y_{n+1} = F_{n+1} \left(\frac{x}{l} \right) = \left(\frac{P}{P_k} \right)^{n+1} \cdot \varphi_{n+1} \left(\frac{x}{l} \right)$$

erhält man durch Division zweier derselben Abszisse x_0 zugeordneter Ordinaten

$$\frac{P_k}{P} = \frac{F_n \left(\frac{x_0}{l} \right)}{F_{n+1} \left(\frac{x_0}{l} \right)} \quad \text{und} \quad P_k = P \frac{F_n \left(\frac{x_0}{l} \right)}{F_{n+1} \left(\frac{x_0}{l} \right)},$$

d. h. die Knicklast P_k erhält man aus der Gebrauchslast P durch Multiplikation mit dem Quotienten der an derselben Stelle x_0 entnommenen Ordinaten zweier aufeinanderfolgender Biegelinien. Für den Fall, daß $F_n \left(\frac{x}{l} \right) = F_{n+1} \left(\frac{x}{l} \right)$, stellt P direkt die Knicklast dar.

Das von Vianello*) entwickelte Verfahren gilt für ungestützte Stäbe. Es könnte für gestützte und teilgestützte Stäbe in unveränderter Form übernommen werden, wenn es gelänge, die aufeinanderfolgenden Biegelinien unter Berücksichtigung des elastischen Stützwiderstandes einwandfrei zu ermitteln. Das ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die genaue Berücksichtigung des Stützwiderstandes die Kenntnis der Form der jeweils resultierenden Biegelinie voraussetzt. Besonders für den Fall, daß die aufeinanderfolgenden Biegelinien stark voneinander abweichen, gelingt es nicht, den Stützwiderstand mit einfachen Methoden richtig zu erfassen. Man kann daher nicht wie beim Vianelloschen Verfahren die Anfangsausbiegung und die Druckkraft P beliebig annehmen, sondern muß diese so festlegen, daß die aufeinanderfolgenden Biegelinien möglichst gleich werden, damit so der Stützwiderstand annähernd richtig berücksichtigt werden kann. Im einzelnen wird dabei wie folgt vorgegangen: Man nimmt eine beliebige Ausbiegung $F_0 \left(\frac{x}{l} \right)$ an und ermittelt

die durch das Moment aus der Druckkraft $\frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ mal der Ausbiegung $F_0 \left(\frac{x}{l} \right)$ verursachte Biegelinie $f_P \left(\frac{x}{l} \right)$.

Als dann wird die Biegelinie $f_{cb} \left(\frac{x}{l} \right)$ infolge der am Stab angreifenden und durch die Ausbiegung $F_0 \left(\frac{x}{l} \right)$ wachgerufenen Stützkräfte festgestellt.

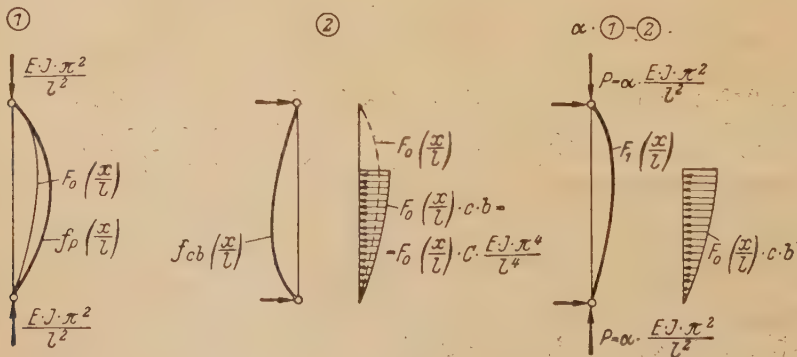


Abb. 8.

Am Druckstab würde nun für die Druckkraft $P = \alpha \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ Gleichgewicht herrschen, wenn für jede Stelle $\left(\frac{x_0}{l} \right)$ die folgende Bedingung erfüllt wäre:

$$F_0 \left(\frac{x_0}{l} \right) = F_1 \left(\frac{x_0}{l} \right) = \alpha \cdot f_P \left(\frac{x_0}{l} \right) - f_{cb} \left(\frac{x_0}{l} \right),$$

*) S. Bemerkung S. 54.

d. h. wenn die aufeinanderfolgenden Biegelinien $F_0\left(\frac{x}{l}\right)$ und $F_1\left(\frac{x}{l}\right)$ kongruent wären. Für diesen Fall wäre dann die Knicklast

$$P_k = \alpha \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} = \frac{F_0\left(\frac{x_0}{l}\right) + f_{cb}\left(\frac{x_0}{l}\right)}{f_P\left(\frac{x_0}{l}\right)} \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}.$$

Nur in den seltensten Fällen, wird es jedoch gelingen $F_0\left(\frac{x}{l}\right)$ von vornherein so zu erraten, daß es der typischen Knickbiegeline entspricht und sich nicht mehr ändert. Es kann jedoch erreicht werden, daß die aufeinanderfolgenden Biegelinien $F_0\left(\frac{x}{l}\right)$ und $F_1\left(\frac{x}{l}\right)$ wenigstens flächengleich werden, wenn

$$\alpha = \frac{\int_0^l F_0\left(\frac{x}{l}\right) \cdot dx + \int_0^l f_{cb}\left(\frac{x}{l}\right) \cdot dx}{\int_0^l f_P\left(\frac{x}{l}\right) \cdot dx}$$

gesetzt wird. Die drei Flächenintegrale können numerisch ermittelt und damit α und darauf die Biegelinie $F_1\left(\frac{x}{l}\right)$ berechnet werden. Dasselbe Verfahren wird dann mit $F_1\left(\frac{x}{l}\right)$ als Ausgangskurve wiederholt und daraus die Biegelinie $F_2\left(\frac{x}{l}\right)$ entwickelt usw. Es zeigt sich hierbei, daß bei bestimmten Lastfällen die aufeinanderfolgenden Biegelinien $F_n\left(\frac{x}{l}\right)$ immer ähnlicher und schließlich praktisch kongruent werden.

Die so durch schrittweise Verbesserung zuletzt erhaltene Biegelinie kann mechanisch als Gleichgewichtsform des ursprünglich geraden Stabes unter der Knicklast aufgefaßt werden, oder man betrachtet die beiden zuletzt erhaltenen kongruenten Biegelinien als die n te und $n+1$ te zusätzliche Ausbiegung eines Druckstabes mit beliebiger Anfangsausbiegung $\varphi_0\left(\frac{x}{l}\right)$. Die zu den beiden aufeinanderfolgenden kongruenten Biegelinien zugehörige Last $P_1 = \alpha \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ stellt dann die gesuchte Knicklast dar.

Die Ermittlung der Biegelinien $f_P\left(\frac{x}{l}\right)$ und $f_{cb}\left(\frac{x}{l}\right)$ erfolgte in der vorliegenden Arbeit rechnerisch unter Zuhilfenahme des Rechenschiebers. Die die Biegelinien verursachenden Belastungs- bzw. Momentenlinien wurden dabei wie in der Statik üblich in Lamellen gleicher Streifenbreite zerlegt und die Schwerpunkte jeweils in Lamellenmitte angenommen. Die Biegelinien $F_n\left(\frac{x}{l}\right)$ ergeben sich als Differenz der beiden Biegelinien $\alpha \cdot f_P\left(\frac{x}{l}\right)$ und $f_{cb}\left(\frac{x}{l}\right)$. Da diese besonders bei größer werdendem Stützwiderstand in ihrer Größen-

ordnung verhältnismäßig wenig voneinander abweichen, ist das Verfahren sehr empfindlich, und die von Vianello vorgeschlagene graphische Ermittlung der Biegelinien konnte nicht angewandt werden. Die Berechnung der Flächenintegrale erfolgte ebenfalls numerisch.

In dem oben beschriebenen Verfahren wurde der Stützwiderstand $c \cdot b = C \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ als gegeben angenommen und die zugehörige Knicklast $P_k = \alpha \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ ermittelt. Auf demselben Wege kann auch bei gegebener Knicklast $P_k = \alpha \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ der zugehörige Stützwiderstand $c \cdot b = C \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ gefunden werden.

Die entsprechende Bedingungsformel lautet dann:

$$F_0\left(\frac{x}{l}\right) = F_1\left(\frac{x}{l}\right) = f_P\left(\frac{x}{l}\right) - C \cdot f_{cb}\left(\frac{x}{l}\right).$$

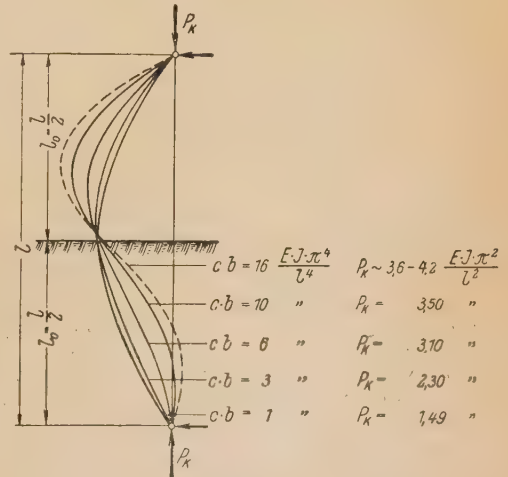


Abb. 9.

Hierbei muß dann $f_P\left(\frac{x}{l}\right)$ mit $P_k = \alpha \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ und $f_{cb}\left(\frac{x}{l}\right)$ mit $c \cdot b = \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ ermittelt werden.

Nach dem beschriebenen und in Anlehnung an die Methode von Vianello entwickelten Verfahren wurde nun für einen auf halbe Länge kontinuierlich gestützten Stab die Knicklast für verschiedene Stützwiderstände ermittelt. Für die Stützwiderstände $c \cdot b = 1, 3, 6, 10$ und $16 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ ergaben sich die in Abb. 9

dargestellten Knickbiegelineien und die dabei eingetragenen Knicklasten.

Bei der Ermittlung der Biegelinien wurde jeweils von einer Sinuslinie als erster Annahme ausgegangen. Für kleine Werte des Stützwiderstandes konvergieren die aus der Anfangsannahme hergeleiteten Biegelinien sehr rasch. Mit zunehmendem Wert $c \cdot b$ wurde die Konvergenz jedoch schlechter. Für $c \cdot b = 16 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ näherten die auseinander hergeleiteten Biegelinien sich nicht mehr von einer Seite

her einer bestimmten Grenzlage, sondern pendelten mit kleiner werdenden Ausschlägen um eine Grenzlage hin und her. Da mit abnehmender Konvergenz auch der Rechenaufwand unverhältnismäßig anwuchs, wurde bei der Berechnung der zu $c \cdot b = 16 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ zugehörigen Knicklast das geschilderte

Verfahren aufgegeben und für größere Werte $c \cdot b$ der im folgenden beschriebene Weg eingeschlagen:

Wie die Darstellung der Biegelinien in Abb. 9 zeigt, geht mit zunehmendem Stützwiderstand die ursprünglich sinusförmige Biegelinie immer mehr in eine aus zwei Halbwellen bestehende Knickfigur über, deren Wendepunkt sich von unten her der Grenzlinie des Stützwiderstandes nähert. Die Knicklast nimmt dabei zu und nähert sich dem Wert $P_k = 4 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$. Dieser Wert entspricht der Knicklast einer ungestützten

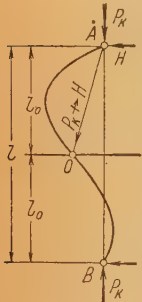


Abb. 10.

Halbwelle mit der Wellenlänge $l_0 = \frac{l}{2}$. Für $P_k = 4 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ muß daher der Wendepunkt genau an der Grenze des elastischen Stützwiderstandes liegen. Es ergibt sich dann etwa die in Abb. 10 dargestellte Knickfigur. Der Wendepunkt 0 ist gleichzeitig der Momentennullpunkt, durch den die Stützlinie A-0 des ungestützten Stabteils hindurchgeht. Die Knickbiegelinie des oberen ungestützten Stabteils ist bekannt und wird durch eine Sinuskurve über der Stützlinie A-0 dargestellt. Es handelt sich im folgenden also nur darum, die Knickbiegelinie des unteren gestützten Stabteils und den zugehörigen Stützwiderstand zu ermitteln. Die Stetigkeit der Biegelinie bei 0 bzw. der tangential Anschluß des oberen Stabteils an den unteren ist gesichert, da beim ungestützten Stab jede Sinuslinie mit beliebigem Pfeil zusammen mit der Knicklast ein mögliches Gleichgewichtssystem darstellt. Wenn es also gelingt, für den in Abb. 11 und 12 skizzierten Lastfall eine eindeutige Gleichgewichtsfigur zu finden, so kann durch tangentialen Anschluß einer Sinuslinie mit entsprechender Tangente ohne Zwängung die Knickbiegelinie des gesamten Stabes hergestellt werden.

Die Biegelinie des unteren gestützten Stabteils wird folgendermaßen gefunden:

Es wird zunächst angenommen, die Biegelinie des gestützten Stabteils sei identisch mit der Geraden 0-B. Aus der Bedingung, daß das Moment aller angreifenden Kräfte um den Punkt B gleich Null sein muß, $P_k \cdot 2 \cdot f - c b \Sigma \Delta l_0 \cdot \eta \cdot x = 0$, ergibt sich ein erster Wert für $c b$. Damit können die unter Berücksichtigung des Stützwiderstandes am Stab angreifenden Momente und daraus die erste verbesserte Biegelinie ermittelt werden. Mit dieser verbesserten Biegelinie wird ein zweiter Wert von $c \cdot b$ ermittelt und die zugehörige neue Biegelinie festgestellt. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis die der Berechnung von $c \cdot b$ zugrunde gelegte Biegelinie sich nicht mehr ändert. Die Ermittlung der aufeinanderfolgenden Biege-

linien erfolgte rechnerisch. Dazu wurde der untere Stabteil mit der Länge $l_0 = \frac{l}{2}$ in 10 gleich große Lamellen unterteilt und die Stützkkräfte in Lamellenmitte angreifend angenommen. Die aufeinanderfolgenden Biegelinien konvergierten sehr rasch. Es herrschte Gleichgewicht am gestützten Stabteil und damit am ganzen Stab für

$$P_k = 4 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} \quad \text{und} \quad c \cdot b \sim 16 \cdot \frac{P_k}{l_0^2} \sim 26 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}.$$

Zur Kontrolle des Verfahrens wurde die für den gestützten Stabteil gefundene Biegelinie durch eine tangential anschließende Sinuskurve zur Knickbiegelinie des Gesamtstabes ergänzt und alsdann mit dem von Vianello hergeleiteten Verfahren überprüft. Zu diesem Zweck wurde die Biegelinie des Gesamtstabes als Anfangsbiegelinie betrachtet und mit der Last $P_k = 4 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$

belastet. Für $c \cdot b = 25,6 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ ergab sich eine praktisch mit der Anfangsbiegelinie zusammenfallende neue Biegelinie.

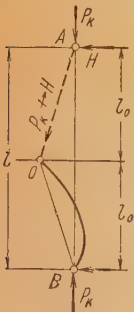


Abb. 11.

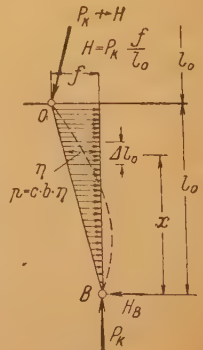


Abb. 12.

Trägt man die hier für einen zur Hälfte gestützten Druckstab gewonnenen Beziehungen zwischen Knicklast und Stützwiderstand in einer Kurve auf (s. Abb. 18), so zeigt sich, daß die Knicklastkurve mit wachsendem Stützwiderstand zunächst rasch ansteigt und dann immer flacher verläuft. Für $c \cdot b = 26 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ erreicht die Knicklast den Wert $P_k = 4 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$. Dies stellt gleichzeitig die Knick-

last des ungestützten Stabteils nach dem zweiten Eulerfall dar: $P_k = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l_0^2}$. Entsprechend bildet sich beim Knickvorgang eine aus zwei Halbwellen bestehende Knickbiegeline mit dem Wendepunkt in Stabmitte, das ist an der Grenze zwischen gestütztem und ungestütztem Stabteil, aus. Wächst der Stützwiderstand weiter an, so wird die Knicklast langsam weiter zunehmen und dabei der Wendepunkt der Biegelinie weiter ansteigen. Die größtmögliche Knicklast beträgt $P_k = 8 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ für $c b = \infty$. Der Wende-

punkt liegt dann um $0,707 \frac{l}{2}$ unter dem oberen Lagerpunkt, das ist $0,147 l$ über Stabmitte. Erforderlichenfalls kann man versuchen, Zwischenwerte des Stützwiderstandes für Knicklasten zwischen $P_k = 4 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ und $P_k = 8 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$ nach dem zuletzt beschriebenen Verfahren zu ermitteln, indem man

den Wendepunkt der Knickbiegeline zwischen Stabmitte und der Grenzlage bei $c b = \infty$ annimmt.

Das von Vianello hergeleitete Verfahren wurde noch für einen auf 70% seiner Gesamtlänge gestützten Stab angewandt und die Knicklasten für $c b = 1, 4$ und $8 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ ermittelt. Die Ergebnisse sind in Abb. 13 eingetragen.

Für $C = 16$ ergab sich wiederum schlechte Konvergenz. Das Verfahren wurde daher als zu zeitraubend abgebrochen und wiederum versucht, unter Annahme eines Wendepunktes an der Grenze des Stützwiderstandes die Biegelinie und den zugehörigen Stützwiderstand des gestützten Stabteils für sich zu ermitteln. Die aufeinanderfolgenden Biegelinien konvergierten jedoch in diesem Falle nicht. Um wenigstens einen Grenzwert für diesen Sonderfall zu erhalten, wurde an Stelle des oben und unten gelenkig gelagerten Druckstabes das in Abb. 14 dargestellte ungünstige statische Ersatzsystem eingeführt.

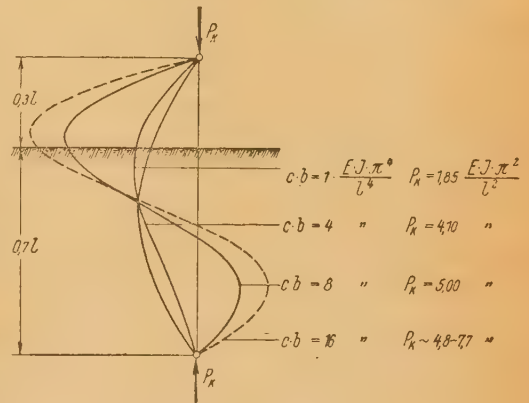


Abb. 13.

Es ergab sich an dem Ersatzsystem Gleichgewicht und Konvergenz der aufeinanderfolgenden Biegelinien für

$$P_k = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l_0^2} = 11,1 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} \quad \text{und} \quad c \cdot b = 17,85 \cdot \frac{P_k}{l_0^2} \sim 220 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}.$$

Die Tatsache, daß das nach Vianello benannte Iterationsverfahren auch bei seitlich ungestützten Stäben nicht in allen Fällen gleich gut konvergiert, ist bereits von Blumenthal¹⁹⁾ und Schleusner²⁰⁾ festgestellt und diskutiert worden; die Ergebnisse ihrer Untersuchungen können sinngemäß auch auf den vorliegenden Fall übertragen werden.

Beide Verfasser gehen von der Betrachtung aus, daß bei jedem Knickproblem eine unendliche Zahl von Eigenfunktionen mit dazugehörigen Eigenwerten als Lösungen auftreten und daß man sich jede beliebige Anfangskurve durch Überlagerung einer Summe von Eigenfunktionen mit verschiedener Schwingungsweite entstanden denken kann. Auf Grund eingehender mathematischer Überlegungen kommen Blumenthal und Schleusner übereinstimmend zu dem Ergebnis, daß die notwendige Bedingung für die Brauchbarkeit des Vianelloschen Iterationsverfahrens darin besteht, daß die Anfangskurve bereits eine Grundfunktion in Richtung der zum kleinsten positiven Eigenwert gehörenden Eigenfunktion enthalten und daß die Schwingungsweite dieser Grundfunktion genügend groß sein muß, damit das Verfahren rasch zum kleinsten Eigenwert hin konvergiert. – Da die Eigenfunktionen eines Druckstabes nichts anderes als mögliche Knickbiegeline und die Eigenwerte die zugeordneten Knicklasten darstellen, bedeutet dies im Rahmen der in dieser Arbeit verwendeten mehr anschaulichen Ausdrucksweise, daß die zunächst beliebig angenommene Anfangsbiegelinie, die man sich durch Überlagerung einer

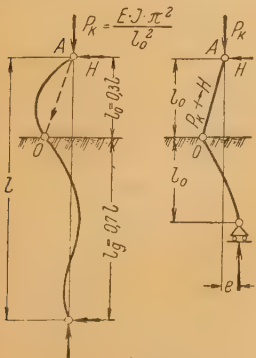


Abb. 14.

¹⁹⁾ Blumenthal, Über die Knickung eines Balkens durch Längskräfte. ZAMM 1937, Heft 4, S. 232.

²⁰⁾ Schleusner, Zur Konvergenz des Engesser-Vianello-Verfahrens. Leipzig 1938, B. G. Teubner.

Summe möglicher Knickbiegelineien entstanden denken kann, von vornherein eine genügend große Grundfunktion im Sinne und in Richtung der zur kleinsten Knicklast gehörenden typischen Knickbiegelineie besitzen muß. Bei seitlich ungestützten Stäben, die nur an den Endauflagerpunkten gedrückt werden, ist der prinzipielle Verlauf der typischen Knickbiegelineie bekannt und besteht beispielsweise beim beiderseits gelenkig gelagerten Stab aus einer konkaven, auf einer Seite der Stabachse verlaufenden Halbwelle. In einem solchen Falle ist es leicht möglich, eine einigermaßen richtige Anfangsannahme zu treffen, und das Verfahren führt rasch zum Ziel. In allen Fällen, in denen die typische Knickbiegelineie aus zwei oder mehreren Teilwellen besteht und eine oder mehrere Nullstellen innerhalb der Stabachse besitzt, ist die zur kleinsten Knicklast gehörende Biegelinie vielfach nicht ohne weiteres auszusehen, und die Annahme einer einfachen und rasch zum Ziele führenden Anfangskurve stößt auf Schwierigkeiten. Man muß damit rechnen, daß das Verfahren unter Umständen langsamer konvergiert, wenn es nicht gelingt, von vornherein eine günstige Anfangsannahme zu treffen. Blumenthal und Schleusner weisen sogar an Hand von Beispielen nach, daß in dem besonderen Falle, wenn die Anfangskurve keinerlei Grundfunktion in Richtung der typischen Knickbiegelineie enthält, sondern lediglich aus einer oder mehreren sich überlagernden Kurven im Sinne und in Richtung von zu höheren Knicklasten gehörenden Biegelinien besteht, das Verfahren zu unrichtigen Ergebnissen führen, d. h. zu hohe Knicklasten ergeben kann. Dieser Sonderfall ist allerdings bei praktischer Benutzung des Vianello-Verfahrens mehr von theoretischer Bedeutung, denn die zu einer höheren Knicklast gehörenden Gleichgewichtslagen sind labil und können sich nur dann einstellen, wenn sie von keinerlei Störungsfunktion in Richtung der zur kleinsten Knicklast gehörenden Biegelinie überlagert sind. Blumenthal und Schleusner haben die Gleichgewichtslagen der erwähnten Beispiele auf analytischem Wege gefunden und durch diese exakt mathematische Behandlungsweise das Auftreten solcher Störungsfunktionen ausgeschlossen. Ermittelt man, wie in der Praxis üblich, die aufeinanderfolgenden Biegelinien des Vianello-Verfahrens zeichnerisch oder numerisch, so werden sich solche Störungsfunktionen infolge der unvermeidlichen Zeichen- oder Rechenungenauigkeiten von selbst einschleichen. Da bereits kleinste Abweichungen imstande sind, labile Gleichgewichtslagen zu stören, ist es auf diese Art praktisch nicht möglich, daß sich einer höheren Knicklast zugeordnete instabile Gleichgewichtslagen einstellen. Dieser Vorgang ist zu vergleichen mit der bei Knickversuchen gemachten Beobachtung, daß stets ohne Rücksicht auf die etwa vorhandene Anfangsausbiegung die zur kleinsten Knicklast gehörende Knickbiegelineie entsteht, obwohl es auch hier theoretisch möglich sein müßte, daß sich labile Gleichgewichtsformen mit höherer Knicklast ausbilden. Diese Beobachtung hat ebenfalls ihren Grund darin, daß bereits ganz geringe, auch mit optischen Hilfsmitteln nicht feststellbare Abweichungen in Richtung der typischen Knickbiegelineie genügen, um den Knickvorgang in dieser Richtung einzuleiten. Selbst wenn man z. B. einen ungestützten beiderseits gelenkig gelagerten Druckstab vorsätzlich im Sinne einer Sinusdoppelwelle verformt und anschließend belastet, knickt er nach anfänglicher Vergrößerung der Doppelwelle infolge der stets vorhandenen überlagerten Störung in Richtung der einfachen Sinuswelle schließlich doch nach einer Seite hin aus.

Aus den dargestellten Gründen ist es praktisch kaum möglich, daß man mit dem Vianello-Verfahren unrichtige, d. h. zu große Knicklasten erhält. Die Tatsache, daß das Verfahren bei ungünstiger Annahme der Ausgangskurve schlecht konvergieren kann, bleibt allerdings bestehen.

Durch die von Blumenthal und Schleusner aufgezeigten Grenzen des Vianelloschen Verfahrens wird seine allgemeine Brauchbarkeit zwar zu einem gewissen Grade eingeschränkt, jedoch keineswegs aufgehoben. Es ist hier vor allen Dingen darauf hinzuweisen, daß auch bei allen anderen bisher ausgearbeiteten Verfahren zur Lösung von Knickproblemen sich die Schwierigkeiten mehren und vielfach sogar unüberwindlich werden, sobald der Verlauf der Knickbiegelineie von der einfachen konkaven Halbwelle abweicht und verwickelter wird. Auch bei der Anwendung exakt mathematischer Methoden besteht die Gefahr, daß unter Umständen die der kleinsten Knicklast zugeordnete Biegelinie übersehen wird, so macht z. B. Chwalla²¹⁾ darauf aufmerksam, daß Zimmermann in seiner bedeutenden Arbeit über die „Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung“²¹⁾ eine Schar von Lösungskurven übersehen hat und dadurch in gewissen Wertebereichen der Bettungswiderstände zu unrichtigen Ergebnissen kam.

So wie auf anderen Gebieten der Statik die Methoden der schrittweisen Näherung insbesondere bei der Behandlung verwickelter Probleme große praktische Bedeutung gewinnen konnten und in manchen Fällen den exakten Verfahren sogar überlegen sind, hat diese Behandlungsweise auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit ihre Brauchbarkeit erwiesen. Die im folgenden Abschnitt beschriebenen Versuche haben sowohl die nach dem erweiterten Vianelloschen Iterationsverfahren als auch die nach den übrigen Näherungsmethoden ermittelten Ergebnisse ausgezeichnet bestätigt*).

²¹⁾ Zimmermann, Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Berlin 1906, Wilh. Ernst & Sohn.

*) Bemerkung: Schleusner²⁰⁾ weist darauf hin, daß der Grundgedanke des im allgemeinen nach Vianello benannten und von diesem im Jahre 1898 veröffentlichten Verfahrens bereits 1893 von Engeßer (Über die Berechnung auf Knickfestigkeit beanspruchter Stäbe aus Schweiß- und Gußeisen. Z. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Vereins.) ausgesprochen wurde. Schleusner schlägt daher die Benennung: Engeßer-Vianello-Verfahren vor.

F. Versuchsmäßige Ermittlung der Knicklast von teilgestützten Druckstäben

Um die mit den oben dargestellten Verfahren ermittelten Rechnungsergebnisse zu überprüfen, wurden im April und Mai 1948 auf Anregung der Herren Professoren Schaffhauser und Dr. Steinhardt an der Versuchsanstalt für Holz, Stein und Eisen der Technischen Hochschule Karlsruhe vom Verfasser Versuche durchgeführt.

Zunächst wurde mit Hilfe des historischen Apparates, auf dem Engeßer um die Jahrhundertwende seine Untersuchungen an elastisch gestützten Stäben durchgeführt hatte⁶⁾ und der aus den Trümmern der teilweise durch Fliegerschaden zerstörten Versuchsanstalt geborgen werden konnte, einige Versuche unternommen, deren Ergebnis in der Liste auf Seite 56 zusammengestellt ist.

Beim Engeßerapparat wird die elastische Querstützung des Druckstabes durch flache, unten eingespannte Blattfedern erreicht. Da der Abstand des Einspannpunktes von der Stabachse unveränderlich ist und deshalb die Federkraft nur durch

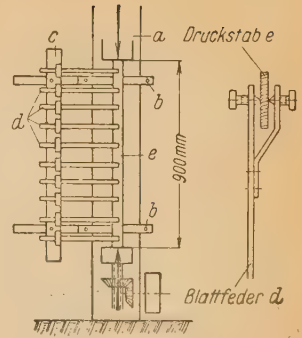


Abb. 15.

Einsetzen andersartiger Federn variiert werden kann, wurde die unten beschriebene verbesserte Apparatur geschaffen, bei der der Abstand zwischen Einspannpunkt der Blattfeder und Stabachse veränderlich ist.

An dem Ständer a einer Universalprüfmaschine (Abb. 15) (Fabrikat Amsler) mit Meßbereichen von 0–500 und 500–5000 kg wurden die beiden [-Eisen b fest angeklemt. Auf diesen horizontalen [-Eisen b ist das [-Eisen c verschieblich angeordnet. An der Kante der [-Schiene c sind 10 Blattfedern d ebenfalls verschieblich befestigt. Der Druckstab e wurde, wie in Abb. 15 skizziert, durch die Blattfedern festgehalten. Die kontinuierliche Stützung des Druckstabes ist durch eine punktweise Stützung in den Mitten der Stabzehntel ersetzt.

An der beschriebenen Apparatur wurden nacheinander drei Druckstäbe mit den nachstehenden äußeren Abmessungen untersucht:

Stab Nr. 3 900 × 48,5 × 2,8 mm

Stab Nr. 4 900 × 19,6 × 2,0 mm

Stab Nr. 5 900 × 51,0 × 6,0 mm.

Die Werte EJ wurden für alle drei Stäbe durch Biegeversuch ermittelt.

Die verwendeten Blattfedern hatten einen Querschnitt von 22,5 × 2,8 mm und konnten auf eine größte Einspannlänge von etwa 35 cm eingestellt werden. Die Versuche wurden so durchgeführt, daß zunächst alle zehn Blattfedern auf gleiche Federlänge eingestellt wurden. Als dann wurde die Elastizität der Federn durch Eichung festgelegt. Unregelmäßigkeiten in der Elastizität der einzelnen Federn, die sich durch Abweichungen in der Federstärke um einige hundertstel Millimeter ergaben, wurden sorgfältig beseitigt, indem die Stärke der dickeren Federn so lange durch Feilen verringert wurde, bis sämtliche Federn bei gleicher Belastung die gleiche Durchbiegung zeigten. Dieser Vorgang wurde vor der Ausführung jeder Versuchsserie wiederholt. Die Versuche wurden dann so durchgeführt, daß der jeweilige Versuchsstab zunächst mit 10 Federn gestützt und die zugehörige Knicklast versuchsmäßig ermittelt wurde. Als dann wurden die Federn nacheinander von oben herunter ausgebaut und die jeweils zugehörige Knicklast bei Stützung mit 9 Federn, 8 Federn usw. gemessen.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind in der Liste auf Seite 57 eingetragen und mit den vorliegenden Rechnungsergebnissen verglichen. Soweit die Rechnungswerte in der Tabelle auf Seite 57 mit einem ~-Zeichen versehen sind, handelt es sich um Rechnungswerte, die nicht direkt gewonnen, sondern aus der Kurve der aufgetragenen Rechnungswerte entnommen wurden. Der Vergleich ergibt eine außerordentlich gute Übereinstimmung der Rechnung mit den Versuchsergebnissen. Lediglich bei dem schwachen Druckstab Nr. 4, bei dem sich nur kleine Drucklasten ergaben, zeigen sich einige Unregelmäßigkeiten, die darauf zurückzuführen sind, daß die kleinen Drücke an der verwendeten Prüfmaschine nicht mehr genau genug abgelesen werden konnten. In Abb. 16 sind die Versuchsergebnisse nochmals kurvenmäßig zusammengestellt. Die Versuchsergebnisse an dem Stab Nr. 4, die sich bei einer Stützung mit weniger als fünf Federn ergaben,

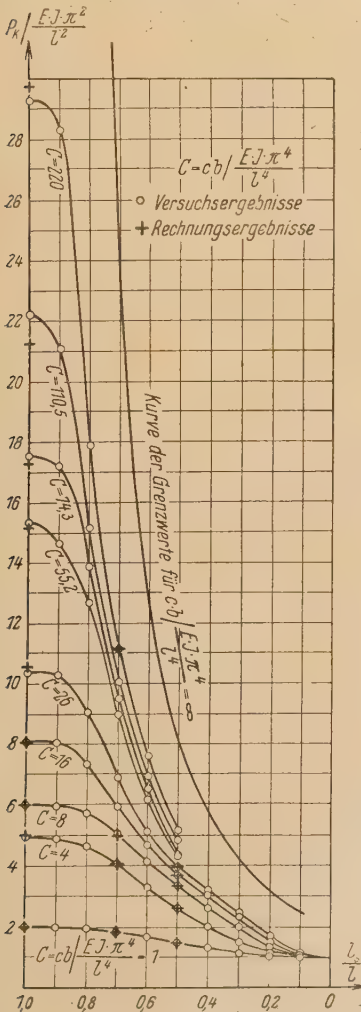


Abb. 16.

Knicklasten bei verschiedenem relativen Stützwiderstand $C = c \cdot b / \frac{EJ \cdot \pi^4}{L^4}$ in Abhängigkeit von der Länge des gestützten Stabteiles l_0 .

Ergebnis der Vorversuche am Engeßerapparat

	Stab Nr. 1		Stab Nr. 1		Stab Nr. 2		Stab Nr. 2		Stab Nr. 2		Stab Nr. 2		Stab Nr. 2	
	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.
$l_g = 1,0 \text{ l}$	68,1	64,0			125,4	129,7								
$l_g = 0,9 \text{ l}$	24,9	23,5			10,5	10,8								
$l_g = 0,8 \text{ l}$			42,0				117,4							
$l_g = 0,7 \text{ l}$			15,4				9,8							
$l_g = 0,6 \text{ l}$			27,8	~ 28,0					78,9	~ 87,50				
$l_g = 0,5 \text{ l}$			10,2	~ 10,25					6,6	~ 7,30				
$l_g = 0,4 \text{ l}$			19,7								59,7			
$l_g = 0,3 \text{ l}$			7,2								5,0			
$l_g = 0,2 \text{ l}$			13,4										46,7	> 48,0
$l_g = 0,1 \text{ l}$			4,9										3,9	> 4,0
$l_g = 0,0 \text{ l}$														

Ergebnis der Versuche am verbesserten Engeßerapparat

Ergebnis der Versuche an verdrehten Stäben																				
	Stab Nr. 5 Versuchstag 29. 4. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 1,0$		Stab Nr. 3 Versuchstag 28. 4. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 4,0$		Stab Nr. 3 Versuchstag 3. 5. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 8,0$		Stab Nr. 3 Versuchstag 4. 5. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 16,0$		Stab Nr. 3 Versuchstag 5. 5. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 26,0$		Stab Nr. 4 Versuchstag 28. 4. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 27,6$		Stab Nr. 4 Versuchstag 3. 5. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 55,2$		Stab Nr. 4 Versuchstag 30. 4. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 74,3$		Stab Nr. 4 Versuchstag 5. 5. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 110,5$		Stab Nr. 4 Versuchstag 5. 5. 1948 $\frac{EJ\pi^4}{cb l^3} = 220,0$	
	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.	Vers.	Rechn.
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 1,0 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	486,0	481,6	109,5	111,5	133,5	133,8	179,5	178,4	231,0	234,0	34,50	35,20	49,50	48,90	56,50	55,70	71,50	68,80	94,50	96,20
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,9 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	2,02	2,00	4,91	5,00	5,98	6,00	8,05	8,00	10,36	10,50	10,68	10,90	15,32	15,13	17,50	17,25	22,16	21,28	29,24	29,75
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,8 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	481,0	479,0	109,0	113,0	133,0	133,0	178,8	178,8	229,0	234,0	34,00	34,00	47,25	47,25	55,50	55,50	68,00	68,00	91,50	91,50
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,7 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	2,00	1,99	4,88	5,00	5,96	6,00	8,02	8,02	10,27	10,50	10,52	10,90	14,62	14,62	17,20	17,20	21,04	21,04	28,30	28,30
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,6 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	476,0	470,0	103,0	107,0	127,3	127,3	163,0	163,0	201,0	201,0	28,50	28,50	41,00	41,00	44,75	44,75	49,00	49,00	57,75	57,75
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,5 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	1,98	1,95	4,62	4,70	5,72	5,72	7,32	7,32	9,02	9,02	8,81	8,81	12,68	12,68	13,85	13,85	15,17	15,17	17,87	17,87
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,4 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	448,5	446,0	91,0	91,5	112,5	111,5	133,0	133,0	154,0	154,0	21,50	21,50	29,00	29,00	30,75	30,75	32,50	32,50	36,00	35,80
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,3 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	1,86	1,85	4,08	4,10	5,05	5,00	5,97	5,97	6,91	6,91	6,66	6,66	8,98	8,98	9,51	9,51	10,06	10,06	11,12	11,10
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,2 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	407,5	409,0	73,0	73,0	92,8	92,8	104,3	104,3	114,0	114,0	16,00	16,00	20,00	20,00	21,00	21,00	22,50	22,50	24,50	24,50
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,1 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	1,69	1,70	3,27	3,27	4,16	4,16	4,68	4,68	5,12	5,12	4,95	4,95	6,19	6,19	6,50	6,50	6,97	6,97	7,58	7,58
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,0 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	354,5	351,2	58,5	59,0	75,3	75,0	82,0	82,0	89,0	89,2	11,75	11,75	13,00	13,00	14,00	14,00	15,50	15,50	16,75	16,75
	1,47	1,50	2,62	2,66	3,38	3,36	3,68	3,74	3,99	4,00	3,64	3,64	4,03	4,03	4,34	4,34	4,80	4,80	5,19	5,19
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,4 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	312,5	312,5	45,0	45,0	58,5	58,5	67,8	67,8	71,0	71,0	9,25	9,25	10,25	10,25	10,50	10,50	11,00	11,00	13,00	13,00
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,3 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	1,33	1,33	2,02	2,02	2,62	2,62	3,04	3,04	3,18	3,18	2,87	2,87	3,18	3,18	3,25	3,25	3,50	3,50	4,03	4,03
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,2 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	276,0	276,0	34,0	34,0	45,0	45,0	53,0	53,0	55,5	55,5	6,75	6,75	7,25	7,25	7,75	7,75	8,00	8,00	10,00	10,00
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,1 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	1,15	1,15	1,52	1,52	2,02	2,02	2,38	2,38	2,49	2,49	2,09	2,09	2,55	2,55	2,40	2,40	2,60	2,60	3,10	3,10
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,0 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	250,5	250,5	25,5	25,5	30,0	30,0	34,5	34,5	38,5	38,5	4,75	4,75	5,00	5,00	5,50	5,50	6,00	6,00	7,50	7,50
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,4 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	1,04	1,04	1,14	1,14	1,34	1,34	1,55	1,55	1,72	1,72	1,47	1,47	1,85	1,85	2,02	2,02	2,20	2,20	2,32	2,32
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,3 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	240,5	240,5	23,5	23,5	24,0	24,0	24,0	24,0	25,0	25,0	3,00	3,00	3,25	3,25	3,50	3,50	3,75	3,75	3,75	3,75
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,2 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	1,00	1,00	1,05	1,05	1,08	1,08	1,08	1,08	1,12	1,12	0,93	0,93	1,01	1,01	1,08	1,08	1,16	1,16	1,16	1,16
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,1 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	238,0	240,8	22,5	22,3	22,0	22,3	24,0	24,0	22,8	22,8	3,25	3,25	3,23	3,23	3,23	3,23	3,50	3,50	3,50	3,50
$P_k \text{ (kg)}$ $l_j = 0,0 \text{ l } \frac{P_k}{P_k l^2} \frac{EJ\pi^2}{l^2}$	0,99	1,00	1,01	1,00	0,99	1,00	1,03	1,03	1,00	1,02	1,01	1,01	1,00	1,01	1,01	1,01	1,08	1,08	1,08	1,08

sowie die gesamten Ergebnisse für $c \cdot b / \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4} = 27,6$ blieben aus den oben angeführten Gründen bei der Aufzeichnung der Kurven unberücksichtigt.

Die rechnerische Ermittlung der Knicklasten beschränkte sich auf Stäbe, die auf 50 und 70% ihrer Gesamtlänge elastisch gestützt waren. Auf Grund der guten Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ist es ohne weiteres möglich, die gewonnenen Versuchsergebnisse auch bei der Nachprüfung der Knicksicherheit von Stäben mit anderen Stützungsverhältnissen zu verwenden.

G. Festhaltung der Pfähle im Pfeilerkopf bei hohen Pfahlböcken

(Versuche an Pfeilermodellen der Lidingöbrücke, ausgeführt von Grün & Bilfinger AG.)

Wie eingangs erwähnt, sollten sich unsere Betrachtungen vornehmlich auf die Knicksicherheit der Einzelpfähle hoher Pfahlböcke beziehen. Die durchgeführten theoretischen und rechnerischen Ermittlungen sowie die Versuche bezogen sich alle auf Druckstäbe, die an ihren Enden gelenkig gelagert und gegen seitliche Verschiebung der Stabenden gesichert sind. (Sog. Eulerfall 2.) Es ist nun zu klären, wieweit die letztere Voraussetzung bei hohen Pfahlböcken für das obere Pfahlende gegeben ist.

Zur Klärung dieser Frage können Versuche herangezogen werden, die anlässlich des Baues der Lidingöbrücke in Stockholm²²⁾ von der bauausführenden Firma Grün & Bilfinger AG. durchgeführt und in der Habilitationsschrift von Prof. Dr. Berrer²³⁾ beschrieben sind.

Bei der Gründung der Lidingöbrücke kamen Pfahlböcke zur Ausführung mit Einzelpfählen, die auf einen Teil ihrer Länge von plastischem Ton umgeben waren und mit ihren Füßen auf festem Granit aufstanden. Die Einzelpfähle waren auf Höhe der Wasserlinie durch Eisenbetonköpfe zusammengefaßt. Da die Pfähle ohne Berücksichtigung des Stütz Widerstandes der Tonschicht bei Berechnung nach dem Eulerfall 2 (oben und unten gelenkig und seitlich unverschieblich gelagert) nicht ausreichend knicksicher waren, sollte versuchsmäßig geklärt werden, inwieweit mit einer eventuellen Einspannung der Pfähle im Pfeilerkopf gerechnet werden kann. Es wurde eine Anzahl von maßstabgerechten Pfeilermodellen mit verschiedener Pfahlanordnung und Pfahlzahl aus etwa 1 m langen Stahlrohren hergestellt. Damit wurden zwei Versuchsreihen, die erste an Pfahlböcken mit 6 und die zweite an solchen mit 8 Pfählen ausgeführt. Die Versuche ergaben folgendes:

Bei rein senkrechter Belastung des Pfeilerkopfes erfahren alle Pfähle des Pfahlbocks annähernd gleiche Belastung und knicken daher geschlossen aus, wobei der Pfeilerkopf eine Drehung ausführt. Bei gleichzeitiger Belastung des Pfeilerkopfes durch Vertikalkräfte, Horizontalkräfte und Momente erfährt ein Pfahl oder eine Pfahlgruppe eine größere Beanspruchung als die übrigen Pfähle; der Zusammenbruch des Pfeilers wird durch das Ausknicken des meistbeanspruchten Pfahles oder der Pfahlgruppe eingeleitet. Die Knicklast des meistbeanspruchten Pfahles ist größer als die eines Pfahles in dem gleichmäßig beanspruchten Pfahlbündel, da der meistbeanspruchte Einzelpfahl durch die übrigen noch nicht ganz ausgenutzten Pfähle eine elastische Einspannung im Pfeilerkopf erfährt. Für die Einzelpfähle ergaben sich folgende Knicklasten:

Bei den Modellen mit 6 Pfählen

bei nur senkrechter zentrischer Belastung durch Schneidenlager	im Mittel	$P = 1,04 \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$
bei nur senkrechter zentrischer Belastung durch Rollenlager	im Mittel	$P = 0,69 \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$
bei zusammengesetzter Belastung	im Mittel	$P = 1,38 \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$

Bei den Modellen mit 8 Pfählen

bei nur senkrechter zentrischer Belastung durch Rollenlager	im Mittel	$P = 1,15 \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$
bei zusammengesetzter Belastung	im Mittel	$P = 1,98 \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$

Die zusammengesetzte Belastung war bei den Versuchen derart bemessen, daß die Beanspruchung des meistbeanspruchten Pfahles um 50 bis 65% über der mittleren Pfahllast lag.

Bei der Bewertung obiger Ergebnisse muß noch berücksichtigt werden, daß die Modellpfähle durch Untergießen mit Zementmörtel mit ihrer ganzen Fläche auf dem Untergrund aufsaßen und dadurch eine teilweise Einspannung erfuhren, die nach Angabe von Professor Berrer die Knicklast um rund 28% gegenüber dem reinen Eulerfall 2 erhöhte.

In bezug auf die eingangs dieses Abschnittes gegebene Fragestellung kann ausgesagt werden, daß man sich bei der Nachprüfung der Knicksicherheit des meistbeanspruchten Pfahles in einem durch senkrechte und waagrechte Kräfte belasteten Pfahlbock immer auf der sicheren Seite befindet, wenn man nach dem sog. Eulerfall 2,

²²⁾ Schaper, Bau der Lidingöbrücke bei Stockholm. Bautechn. 2 (1924), Heft 37, 42, 44, 55, S. 405, 479, 503, 660; 3 (1925), Heft 6, 17 u. 19, S. 59, 226 u. 250.

²³⁾ Berrer, Belastungsversuche an Modellen der Pfeiler für die Lidingöbrücke. Habilitationsschrift. (Versuche ausgeführt von Grün & Bilfinger AG.)

d. h. unter Annahme drehbarer, aber gegen seitliche Verschiebung gesicherter Stabenden rechnet. Um die bei 8 und mehr Pfählen in diesem Fall zweifellos vorhandene elastische Einspannung allgemein zu berücksichtigen, müßten noch eingehende Versuche angestellt werden. Pfahlböcke, auf die nur senkrechte Lasten durch Rollenlager übertragen werden, sollten aus mindestens 8 oder mehr Pfählen bestehen, damit die seitliche Unverschieblichkeit des Pfeilerkopfes unter dem Lasteintragungspunkt gewährleistet ist und die Berechnung der Knicklast nach Eulerfall 2 erfolgen kann.

H. Die Bettungsziffer

Bei der Berechnung der Knicklasten kontinuierlich quergestützter Stäbe wurde in den vorausgegangenen Abschnitten die Stützkraft durch den Ausdruck $c \cdot b$ berücksichtigt. Hierbei bedeutet:

b = Pfahlbreite (cm)

c = Bettungsziffer (kg/cm³).

Die Bettungsziffer wurde erstmals von Zimmermann²⁴⁾ bei der Berechnung des Gleisoberbaus eingeführt und späterhin allgemein bei der Berechnung elastisch gelagerter Baukörper verwendet.

Die Größe der Bettungsziffer ist abhängig von der

1. spezifischen Pressung unter der Lastfläche
2. Steifezahl des Bodens E_B (kg/cm²)
3. Mächtigkeit der zusammendrückbaren Schichten
4. Form und Größe der Lastfläche
5. Art der Druckausbreitung im Erdreich.

Diese vielfache Abhängigkeit erschwert die einwandfreie Ermittlung der Bettungsziffer im Einzelfall. Es wurde deshalb von Seiten der Erdbaumechaniker^{25) 26)} verschiedentlich gegen ihre Verwendung Stellung genommen. Wenn man jedoch einen mathematischen Zusammenhang zwischen Kraftwirkung und Einsenkung oder, wie im Falle der vorliegenden Arbeit, zwischen der seitlichen Ausbiegung des gedrückten Pfahls und den dadurch wachgerufenen Erdstützkräften herstellen will, ist die Verwendung der Bettungsziffer nicht zu umgehen²⁵⁾.

Auf Grund der klassischen Grundgleichung von Boussinesq, die von der Annahme unbegrenzter seitlicher Spannungsausbreitung im elastisch isotropen Halbraum ausgeht, hat Steinbrenner^{25) 26)} geschlossene Formeln zur Berechnung der Setzungen unter rechteckigen, schlaffen Lastplatten aufgestellt. Darnach ergibt sich z. B. bei Annahme unendlicher Ausdehnung der zusammendrückbaren Bodenschichten und einer Poissonschen Querdehnungsziffer von $m = 3,33$ in der Mitte einer Lastplatte vom Seitenverhältnis $b : a = 1 : 10$

eine Setzung von $s = 2,32 \cdot b \cdot \frac{p_0}{E_B}$. Hierin bedeutet

p_0 = spezifische Bodenpressung (kg/cm²)

E_B = Steifezahl des Bodens (kg/cm²).

Durch Umrechnung erhält man die Bettungsziffer:

$$c = \frac{p_0}{s} = 0,43 \frac{E_B}{b} \quad \text{oder} \quad c \cdot b = 0,43 \cdot E_B.$$

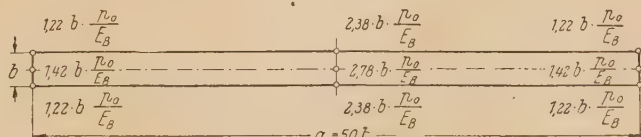


Abb. 17.

An den Rändern und in der Mitte einer schlaffen Lastplatte mit dem Seitenverhältnis $b : a = 1 : 50$ erhält man bei einer Mächtigkeit der zusammendrückbaren Schicht von $50 \cdot b$ und sonst gleichen Annahmen wie oben die in Abb. 17 eingetragenen Setzungen. Unter Annahme allseitiger parabolischer Krümmung der

Setzungsfläche ergibt sich eine mittlere Setzung von rund $s = 2,22 \cdot b \cdot \frac{p_0}{E_B}$ und daraus

$$c \cdot b = 0,45 E_B.$$

²⁴⁾ Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues, 2. Aufl. Berlin 1930, Wilh. Ernst & Sohn.

²⁵⁾ Kögler-Scheidig, Baugrund und Bauwerk, 5. Aufl. Berlin 1948, Wilh. Ernst & Sohn.

²⁶⁾ Steinbrenner, Tafeln zur Setzungsberechnung. Straße 1934, Heft 4, S. 121.

²⁷⁾ Sturzenegger, Maste und Türme in Stahl. Berlin 1929, Wilh. Ernst & Sohn.

²⁸⁾ Loos u. Breth, Die Berechnung elastisch gebetteter Balken und Platten. (Bautechnische Hefte der Bau- und Ingenieurschule Bremen, Heft 3.) Bremen-Horn 1948, W. Doorn G.m.b.H.

Nach Kögler²⁵⁾ ergibt sich unter Annahme gradliniger Druckausbreitung unter 45° (einfache Annahme) für eine unendlich lange Streifenfläche mit einer Breite b und für eine zusammendrückbare Bodenschicht von der Mächtigkeit 20 b :

$$cb = 0,54 E_B,$$

und unter denselben Annahmen für eine zusammendrückbare Bodenschicht von der Mächtigkeit 50 b :

$$cb = 0,43 \cdot E_B.$$

Da die zur Verhinderung des Ausknickens gedrückter Pfähle erforderlichen Stützkräfte sehr gering sind (siehe auch Abschnitt J, Beispiel 3) ist es sehr unwahrscheinlich, daß sich der Bereich der Zusammendrückung des Bodens bis auf eine Entfernung von der 20- oder 50fachen Pfahlbreite oder gar noch weiter erstrecken wird. Die so unter Berücksichtigung der Pfahlbreite und der Steifezahl ermittelten Bettungsziffern liegen jedenfalls erheblich unter den anderwärts im Schrifttum²⁷⁾ genannten Werten, so daß man sich bei ihrer Verwendung – unter der Voraussetzung, daß die Steifezahl des Bodens richtig ermittelt wurde – auf der sicheren Seite befinden wird.

Die Bettungsziffer kann gegebenenfalls auch mit Hilfe des von Kögler²⁵⁾ entwickelten Seitendruckapparates unmittelbar für in verschiedener Tiefe liegende Bodenschichten gemessen werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde durchweg gerechnet mit einer Bettungsziffer $c = 0,43 \frac{E_B}{b}$, wobei E_B als konstant für die Gesamtstärke der den Pfahl umhüllenden zusammendrückbaren Bodenschichten angenommen wurde. Diese Annahme wird bei oft mit beträchtlicher Länge im Boden stehenden Pfählen wegen der Ungleichheit der Bodenschichten nur selten erfüllt sein. Außerdem ist die Steifezahl auch bei vollständig homogenen Böden nicht konstant, wie die Gleichungen von Boussinesq, Steinbrenner und Kögler voraussetzen, sondern abhängig von der spezifischen Pressung des Bodens. Infolge der stets wellenförmigen Knickbiegeline treten längs der Pfahlachse verschieden große seitliche Pressungen auf, so daß auch aus diesem Grunde die Annahme konstanter Bettungsziffer nicht streng erfüllt wird. Die getroffene vereinfachende Annahme bedingt aber, wie leicht einzusehen ist, daß die im Bereich der größten Ausbiegung der Knickbiegeline angenommene Bettungsziffer von entscheidendem Einfluß auf die Größe der Knicklast ist. Die im Abschnitt E dargestellten Verfahren zur Ermittlung der Knicklast teilgestützter Stäbe erlauben allerdings auch die Berücksichtigung mit der Tiefe veränderlicher Steifezahlen bzw. Bettungsziffern. Wie jedoch im nächsten Abschnitt gezeigt wird, genügen durchweg bereits sehr geringe elastische Widerstände, um die Knicklast von Pfählen so erheblich zu erhöhen, daß für die Standsicherheit von Spitzenpfählen nicht so sehr die Knicksicherheit als die Pressung zwischen Pfahlspitze und dem tragenden Baugrund ausschlaggebend ist.

Um die Knicksicherheit von Pfahlgründungen nachzuweisen, dürfte also unbeschadet der gegen das Bettungszifferverfahren zu erhebenden Einwendungen die vereinfachende Annahme einer gleichförmigen Bettungsziffer berechtigt erscheinen, wenn man für die Bettungsziffer einen „absoluten unteren Kleinstwert“ einführt. Als solcher kann der in der vorliegen-

den Arbeit verwendete Wert $c = 0,43 \frac{E_B}{b}$ betrachtet werden.

J. Anwendung und Beispiele

In den Abb. 18 u. 19 sind auf Grund der durchgeführten Rechnungen und Versuche die Knicklastkurven für quergestützte Druckstäbe mit verschiedener Stützlänge in Abhängigkeit von dem relativen Stütz-

widerstand $C = c \cdot b / \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$ aufgetra-

gen. Aus diesen Diagrammen können ohne Rechnungen die Knicklasten für die weitaus meisten Fälle der Baupraxis entnommen werden. Um den Gebrauch der Kurven auch ohne eingehende Kenntnis der vorausgegangenen Erörterungen zu ermöglichen, sind im folgenden die in diesen Diagrammen aufgeführten Bezeichnungen nochmals festgelegt.

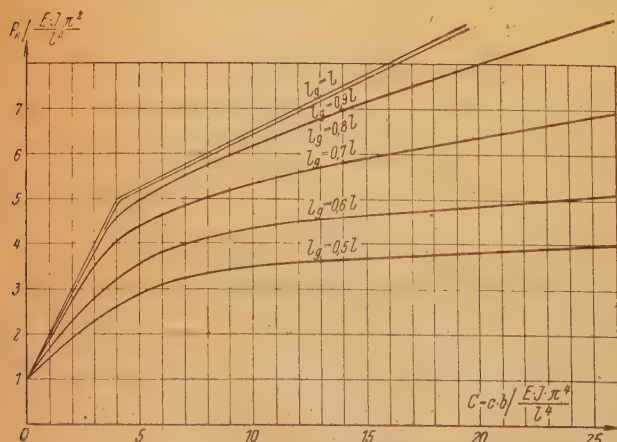


Abb. 18. Knicklasten teilgestützter Druckstäbe von verschiedener Stütz-
länge l_g in Abhängigkeit von dem relativen Stütz Widerstand

$$C = c \cdot b / \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}.$$

P_k = Knicklast des theoretisch geraden, zentrisch belasteten Stabes bei gelenkiger, seitlich unverschieblicher Lagerung der Stabenden (kg)
 E = Elastizitätsmodul des Pfahlbaustoffes (kg/cm²)
 J = kleinstes Trägheitsmoment des Pfahles (cm⁴)
 l = Pfahllänge (cm)
 l_g = Länge des gestützten Pfahlteils (cm)
 $l_g = 0,8 l$ heißt: Stab ist auf $\frac{8}{10}$ seiner Länge elastisch gestützt
 c = Bettungsziffer (kg/cm³)
 b = Pfahlbreite (cm)
 $c \cdot b$ = $0,43 E_B$ (nach Steinbrenner) (kg/cm²)
 E_B = Steifezahl des Erdreichs (kg/cm²).

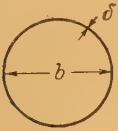
Beispiele

1. Mindestknicklast von Pfählen, die auf ihre ganze Länge elastisch gestützt sind

Um einen eindrucksvollen Überblick über die kleinste Knicklast von durchlaufend elastisch gestützten Pfählen zu geben, sind im folgenden die Mindestknicklasten von drei verschiedenen Pfählen zusammengestellt und die zugehörigen kritischen Knicklängen eingetragen.

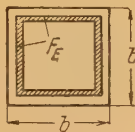
Der Ausdruck „Mindestknicklast“ besagt: Sind die Pfähle kürzer, als die kritische Knicklänge angibt, so ist ihre Knicklast größer als in der Tabelle angegeben, sind sie länger, so ist ihre Knicklast mindestens so groß, wie in der Tabelle eingetragen.

Pfahl 1: Stahlrohrpfahl



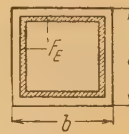
Stahlrohrpfahl Abb. 20.
 Außendurchmesser $b = 41,8$ cm
 Wandstärke $\delta = 1,2$ cm
 Elastizitätsmodul $E = 2100000$ kg/cm²
 Trägheitsmoment $J = 31564$ cm⁴

Pfahl 3



Stahlbetonpfahl Abb. 22.
 Seitenlänge $b = 30$ cm
 Bewehrung $F_E = 3\% = 27$ cm²
 Elastizitätsmodul des Betons $E = 140000$ kg/cm²
 Ideelles Trägheitsmoment $J_i = 97000$ cm⁴
 $c \cdot b = 0,43 E_B$ (nach Steinbrenner)

Pfahl 2



Stahlbetonpfahl Abb. 21.

Seitenlänge $b = 40$ cm
 Bewehrung $F_E = 3\% = 48$ cm²
 Elastizitätsmodul des Bewehrungsstahls $E_E = 2100000$ kg/cm²
 Elastizitätsmodul des Betons $E = 140000$ kg/cm²
 Ideelles Trägheitsmoment $J_i = 328533$ cm⁴

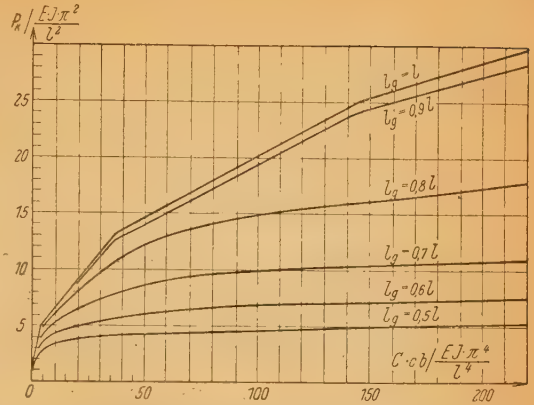


Abb. 19. Knicklastenteilgestützter Druckstäbe von verschiedener Stützlänge l_g in Abhängigkeit von dem relativen Stützweerstand $C = c \cdot b / \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$.

Mindestknicklast nach (7) $P_k = 2 \sqrt{E \cdot J \cdot c \cdot b}$

kritische Knicklänge nach (6) $l_{0k} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{c \cdot b}}$

Steifezahl des Bodens	Pfahl 1		Pfahl 2		Pfahl 3	
E_B (kg/cm ²)	$P_{k \min}$ (t)	l_{0k} (m)	$P_{k \min}$ (t)	l_{0k} (m)	$P_{k \min}$ (t)	l_{0k} (m)
0,5	239	23,50	199	21,40	108	15,80
1	338	19,70	281	18,00	153	13,20
2	477	16,60	398	15,10	216	11,10
3	584	15,00	488	13,60	264	10,10
4	675	13,90	562	12,70	306	9,40
5	754	13,20	630	12,00	342	8,85
6	827	12,60	690	11,50	374	8,50
8	954	11,70	796	10,70	432	7,90
10	1070	11,10	890	10,10	484	7,45
20	1510	9,30	1258	8,50	684	6,25
50	2390	7,40	1990	6,75	1080	5,00
100	3380	6,25	2810	5,70	1530	4,20
200	4770	5,25	3980	4,80	2160	3,50
500	7540	4,15	6300	3,80	3420	2,80
1000	10700	3,50	8900	3,20	4840	2,35
2000	15100	2,95	12580	2,70	6840	2,00

Die Mindestknicklast wächst mit wachsender Steifezahl des stützenden Erdreichs sehr rasch an. Nimmt man an, daß der Hohlpfahl 1 ohne Spitze gerammt und nach dem Rammern ausgeräumt und ausbetoniert sei und daß die Betonpfähle 2 und 3 mit der ganzen Fußfläche aufstehen, so ergeben sich, wenn man $\frac{1}{4}$ der Mindestknicklasten bei $E_B = 2 \text{ kg/cm}^2$ als Gebrauchslast zuläßt, unter den Pfahlspitzen die folgenden Spannungen:

$$\text{Pfahl 1} \quad \sigma = \frac{477000}{4 \cdot 1380} = 86 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Pfahl 2} \quad \sigma = \frac{398000}{4 \cdot 1600} = 60 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Pfahl 3} \quad \sigma = \frac{216000}{4 \cdot 900} = 60 \text{ kg/cm}^2.$$

$E_B = 2 \text{ kg/cm}^2$ entspricht nach Kögler-Scheidig²²⁾ etwa der mittleren Steifezahl von Torf. Für Schlick gibt derselbe Verfasser Steifezahlen zwischen 5 und 30 kg/cm^2 an.

Es zeigt sich, daß bei Spitzenpfählen, die auf ihre ganze Länge elastisch gestützt sind, auch bei sehr weichen Bodenarten nicht die Knicksicherheit, sondern die Spannung unter der Pfahlspitze für die Standsicherheit maßgebend ist.

2. Knicksicherheit der Stahlrohrpfähle bei dem geplanten Widerlager einer Straßenbrücke über den unteren Bug

Die im Jahre 1943 in Bau genommene Straßenbrücke über den Bug bei Nikolajew stellt ein interessantes Gründungsproblem dar, da der tragende Baugrund etwa 30 m unter dem Wasserspiegel lag. Die den tragenden Baugrund überlagernden Faulschlammsschichten waren für die Aufnahme senkrechter Bauwerkslasten ungeeignet. Deshalb sollten Pfeiler und Widerlager mit Pfahlböcken aus Stahlrohrpfählen gegründet werden. Der im nächsten Abschnitt auf Knicksicherheit berechnete Flußpfeiler wurde ausgeführt. Das hier berechnete Landwiderlager kam wegen der Kriegsereignisse nicht über die Planung hinaus.

Die Pfähle des Widerlagers sollten mit einer kleinen Landramme in mehreren Teilstücken gerammt und unter der Ramme aufgeschweißt werden. Da hierbei infolge ungenauen Zusammensetzens der Einzelteile eventuell mit größeren Anfangsexzentrizitäten gerechnet werden muß, soll ihr Einfluß auf die Tragkraft untersucht werden.

a) Knicksicherheit ohne Berücksichtigung der Anfangsexzentrizität.
(Theoretische Knicksicherheit des geraden zentrisch belasteten Pfahles.)

Maximale Pfahllast infolge senkrechter und waagrechter Lasten $P = 87 \text{ t}$.

Pfahlabmessungen:

Rohrpfahl wie in Beispiel 1.

Außendurchmesser	$b = 41,8 \text{ cm}$
Wandstärke	$\delta = 1,2 \text{ cm}$
Stahlrohrquerschnitt	$F = 153 \text{ cm}^2$
Elastizitätsmodul	$E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$
Trägheitsmoment	$J = 31564 \text{ cm}^4$
Widerstandsmoment	$W = 1519 \text{ cm}^3$
Trägheitsradius	$i = 14,4 \text{ cm}$
Kernweite	$k = 9,9 \text{ cm}$
Fußfläche des Pfahles	$F_F = 1380 \text{ cm}^2$
Pfahllänge	$l = 3000 \text{ cm}$
gestützte Pfahllänge	$l_g = 3000 \text{ cm}$
Steifezahl des Faulschlammes nach Messung an ungestörten Bodenproben	$E_B = 2-200 \text{ kg/cm}^2$

Im folgenden soll bei der Ermittlung der Knicklast nur die kleinste gemessene Steifezahl des Faulschlammes berücksichtigt werden.

Nach Tabelle auf Seite 61 beträgt die Mindestknicklast

$$P_{k\min} = 477 \text{ t.}$$

Unter Benützung der Kurven der Abb. 18 erhält man:

$$\frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} = 72700 \text{ kg} (= \text{Eulerlast ohne Stützung}). \text{ (Pfahl ist ohne Stützung nicht knicksicher.)}$$

$$c \cdot b = 0,43 \quad E_B = 0,43 \cdot 2 = 0,86 \text{ kg/cm}^2 \text{ (nach Steinbrenner)}$$

$$\frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4} = 0,080 \text{ kg/cm}^2$$

$$C = c \cdot b / \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4} = 10,8.$$

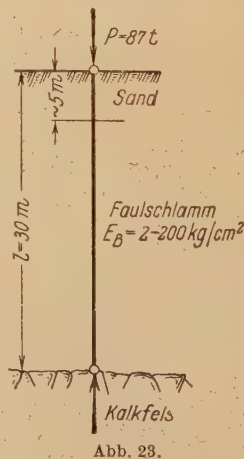


Abb. 23.

Aus der Kurventafel Abb. 18:

$$P_k \sim 6,6 \cdot \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} = 480 \text{ t.}$$

Bei Berechnung nach Formel (5) bzw. (5a) erhält man für eine Halbwelle mit $n = 1$

$$P_{k1} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} l^2 = 72700 + 784000 = 856700 \text{ kg,}$$

für zwei Halbwellen mit $n = 2$

$$P_{k2} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2 \cdot 4}{l^2} + \frac{c \cdot b}{\pi^2} \frac{l^2}{4} = 290800 + 196000 = 486800 \text{ kg.}$$

Sicherheit gegenüber der theoretischen Knicklast des geraden zentrisch belasteten Stabes:

$$n = \frac{486800}{87000} = 5,6.$$

b) Spannungen und Sicherheit bei Berücksichtigung von Anfangsexzentrizität.

Der Pfahl will, wie gezeigt wurde, in 2 Halbwellen ausknicken. Als ungünstigste Form der Anfangsexzentrizität wird daher eine Anfangsexzentrizität, bestehend aus 2 Sinushalbwellen mit 15 cm Pfeilhöhe angenommen (Abb. 24).

Nach Formel (8) ist sinngemäß:

$$M_{\max} = P \cdot y_{\max} - c \cdot b (y_{\max} - f_0) \left(\frac{l}{2} \right)^2.$$

Nach (2a) ist

$$y_{\max} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} = 15 \frac{1}{1 - \frac{87000}{486800}} = 18,3 \text{ cm}$$

$$M_{\max} = 87000 \times 18,3 - 0,86 \times (18,3 - 15,0) \frac{1500^2}{\pi^2} = 1590000 - 647000 = 943000 \text{ kg/cm.}$$

Damit wird die größte Randspannung:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{870000}{153} + \frac{943000}{1510} = 568 + 624 = 1192 \text{ kg/cm}^2.$$

Traglast bei Annahme einer doppelsinusförmigen Anfangsausbiegung wie oben:

$$\text{Nach (10)} \quad \sigma_T = \frac{1}{2} [\sigma_{\max} + \sigma_k + \varepsilon \cdot \sigma_E - \sqrt{(\sigma_{\max} + \sigma_k + \varepsilon \sigma_E)^2 - 4 \cdot \sigma_k \cdot \sigma_{\max}}]$$

$$\sigma_{\max} = \text{Fließgrenze} = 2400 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_k = \sigma_E + \sigma_{St} = 1920 + 1280 = 3200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_E = \text{Knickspannung nach Euler} = \frac{E \cdot \pi^2}{\lambda^2} = \frac{2100000 \cdot \pi^2}{104^2} = 1920 \text{ kg/cm}^2$$

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{1500}{14,4} = 104$$

$$\sigma_{St} = \frac{c \cdot b \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2}{\pi^2 \cdot F} = \frac{0,86 \cdot 1500^2}{\pi^2 \cdot 153} = 1280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon = \frac{f_0}{k} = \frac{15}{9,9} = 1,52$$

$$\sigma_T = \frac{1}{2} [2400 + 3200 + 1,52 \cdot 1920 - \sqrt{(2400 + 3200 + 1,52 \cdot 1920)^2 - 4 \cdot 3200 \cdot 2400}]$$

$$\sigma_T = 1020 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Traglast } P_T = 153 \cdot 1020 = 156000 \text{ kg.}$$

Sicherheit gegenüber der Fließgrenze bei doppelsinusförmiger Anfangsausbiegung von max 15 cm:

$$n = \frac{156000}{87000} = 1,8.$$

Im Stahlbau ist eine 1,5–1,7fache Sicherheit gegenüber der Fließgrenze üblich. (Bei sorgfältiger Herstellung kann Anfangsexzentrizität von 15 cm mit Sicherheit vermieden werden.)

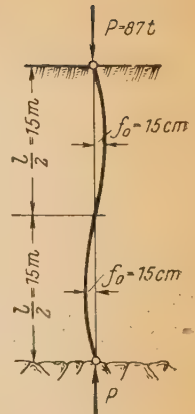


Abb. 24.

Es soll noch der Einfluß einer Anfangsexzentrizität in Form einer Sinushalbwellen mit $f_0 = 20$ cm untersucht werden (s. Abb. 25).

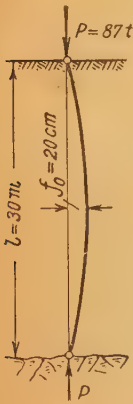


Abb. 25.

Nach (8)

$$M_{\max} = P \cdot y_{\max} - e \cdot b \cdot (y_{\max} - f_0) \frac{l^2}{\pi^2}.$$

Nach (2a)

$$y_{\max} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} = 20 \frac{1}{1 - \frac{87000}{856700}} = 22,2 \text{ cm.}$$

In die Formel für $y_{\max}$ ist die Knicklast einzusetzen, die sich bei Ausknicken in einer Welle ergibt.

$$M_{\max} = 87000 \times 22,2 - 0,86 \cdot 2,2 \cdot \frac{3000^2}{\pi^2} = 1930000 - 1720000 = 210000 \text{ kg} \cdot \text{cm.}$$

$$\text{Moment im Stabviertel } M_e = 210000 \cdot \sin 45^\circ = 149000 \text{ kg} \cdot \text{cm.}$$

$$\text{Zusatzspannung in Stabmitte } \Delta \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{210000}{1510} = 139 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{Zusatzspannung im Stabviertel } \Delta \sigma_e = \frac{M_e}{W} = \frac{149000}{1510} = 99 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zusätzlichen Biegespannungen sind ganz wesentlich geringer als bei doppelsinusförmiger Anfangsexzentrizität mit nur 15 cm Pfeilhöhe. Nur die Anfangsexzentrizität im Sinne der dem Stab zugeordneten typischen Knickbiegeline ist von Bedeutung!

Bodenpressung unter dem Pfahlfuß der ausbetonierten Rohre

$$\sigma = \frac{87000}{1380} = 63 \text{ kg/cm}^2!!!$$

3. Knicksicherheit der Stahlrohrpfähle der Flußpfeiler einer Straßenbrücke über den unteren Bug (ausgeführt von Grün & Bilfinger AG.).

Rohrabmessungen und Belastung wie in Beispiel 2.

Pfahl ist auf 80% seiner Länge durch Faulschlamm gestützt. $l_g = 0,8 l$.

$$\frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^3} = 72700 \text{ kg}$$

$$c \cdot b = 0,43 \cdot 2 = 0,86 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4} = 0,080 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_{\min} = \frac{0,86}{0,080} = 10,8.$$

Nach Kurventafel Abb. 18:

$$P_k \sim 6,35 \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} = 461 \text{ t}$$

$$\text{Sicherheit } n = \frac{461}{87} = 5,3.$$

Die vorhandene Sicherheit ist ausreichend, da die Pfähle sehr gerade.

Größte seitliche Bodenpressung in Höhe der Flußsohle

Seitliche Bodenpressungen können nur auftreten, wenn der Pfahl von vornherein eine Anfangsexzentrizität besitzt. Die Pfähle der Flußpfeiler wurden auf ihre ganze Länge auf dem Werkplatz zusammengeschweißt und waren sehr gerade. Es wird jedoch angenommen, daß der betrachtete Pfahl eine Anfangsexzentrizität im Sinne der zugeordneten typischen Knickbiegeline habe. Die Anfangsexzentrizität in Höhe Flußsohle sei im ungünstigsten Falle $f = 10$ cm. Unter Einwirkung der Belastung erhält man bei sinngemäßer Anwendung der Formel (2a) eine Gesamtausbiegung von

$$y = f \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} = 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{87}{461}} = 12,3 \text{ cm,}$$

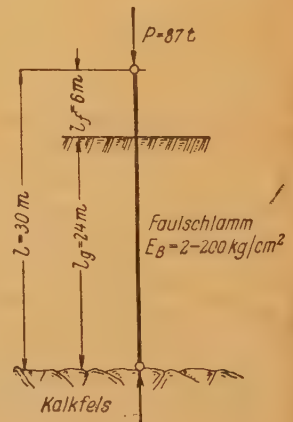


Abb. 26.

zusätzliche Ausbiegung

$$y - f = 12,3 - 10 = 2,3 \text{ cm},$$

seitliche Bodenpressung

$$p = c \cdot 2,3 = \frac{0,86}{41,8} \cdot 2,3 = 0,047 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach ausgeführten Untersuchungen lag die Bruchfestigkeit des Faulschlammes bei ungehinderter Seitenausdehnung zwischen 0,12 und 2,3 kg/cm².

4. Knicksicherheit der Eisenbetonpfähle der Pfeiler der Lidingöbrücke (ausgeführt von Grün & Bilfinger AG).

Bei der in den Jahren 1922–1924 erbauten Lidingöbrücke über einen Meeresarm bei Stockholm liegen an dem ungünstigst beanspruchten Pfeiler folgende Verhältnisse vor.

Größte Pfahllast aus Vertikallasten und Seitenkräften.

$$P = 273,5 \text{ t.}$$

Pfahlabmessungen:

Außendurchmesser	$b = 93 \text{ cm}$
Bewehrung	$F_E = 14 \varnothing 23 = 58 \text{ cm}^2$
Rohrquerschnittsfläche	$F = 6793 \text{ cm}^2$
ideelles Trägheitsmoment	$J_i = 4459072 \text{ cm}^4$
Elastizitätsmodul des Betons	$E = 140000 \text{ kg/cm}^2$
Pfahllänge	$l = 4300 \text{ cm}$
gestützte Pfahllänge	$l_g = 2530 \text{ cm} \sim 0,6 l$

$$\frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2} = \frac{140000 \cdot 4459072 \cdot \pi^2}{4300^2} = 334000 \text{ kg.}$$

(Knikksicherheit ohne Stützung $\frac{334}{273,5} = 1,22 = \text{unzureichend}$).

Bettungsziffer.

Die die Pfähle umgebende Tonschicht ist sehr gleichmäßig. Gemessene Steifezahlen liegen nicht vor. Die Konsistenz des Tons befindet sich etwa an der Grenze zwischen dem weich- und dem steifplastischen Bereich.

Nach Kögler-Scheidig²²⁾ ist für weichplastischen Ton

$$E_B = 15-40 \text{ kg/cm}^2,$$

für steifplastischen Ton

$$E_B = 40-80 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4} = 0,178 \text{ kg/cm}^2. \quad c \cdot b = 0,43 \cdot E_B \text{ (nach Steinbrenner).}$$

Nach Kurventafel Abb. 19 ergibt sich für verschiedene Steifezahlen:

E_B kg/cm ²	$c b$ kg/cm ²	$C = c b / \frac{E \cdot J \cdot \pi^4}{l^4}$	P_k t	Sicherheit n
15	6,45	34	$5,4 \cdot 334 = 1800$	$\frac{1800}{273} = 6,6$
40	17,2	92	$6,8 \cdot 334 = 2270$	$= 8,3$
80	34,4	184	$7,3 \cdot 334 = 2440$	$= 8,9$

Die verwendeten Pfähle waren sehr gerade. Die vorhandene Knicksicherheit ist daher in jedem Falle mehr als ausreichend.

Die Pfähle wurden als Hohlpfähle gerammt und nachträglich ausgeräumt und ausbetoniert. Die größte Spannung unter dem Pfahlfuß beträgt:

$$\sigma = \frac{273500}{6793} = 40 \text{ kg/cm}^2!$$

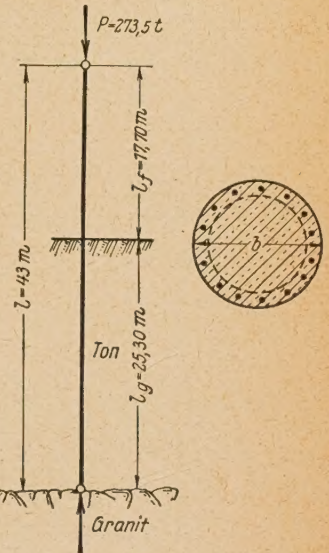


Abb. 27.

Schlußbetrachtung

In der vorliegenden Arbeit konnte gezeigt werden, daß die Knicksicherheit von Spitzenpfählen bereits durch geringfügige Erdwiderstände ganz wesentlich erhöht werden kann. Wie die durchgerechneten Beispiele zeigen, besteht bei Pfählen, die auf ihre ganze Länge im Boden stehen, auch bei ausgefallen weichen Böden im Normalfall keine Knickgefahr. Nur wenn die verwendeten Pfähle besonders stark von der geraden Achsform abweichen und außerdem in sehr nachgiebigem Boden stehen, ist unter Umständen eine Nachprüfung der Knicksicherheit unter Berücksichtigung der Anfangsexzentrizität erforderlich. Bei gerader Achsform wird die Tragkraft der Pfähle nicht durch die Knicksicherheit, sondern durch die Standsicherheit der Pfahlspitze auf dem tragenden Baugrund bedingt.

Bei Pfählen, die nur teilweise im Boden stehen, ist die Knicklast weitgehend von der Länge des freistehenden Pfahlteils abhängig. Auch bei teilgestützten Pfählen wird die Knicksicherheit durch die seitliche Stützung des im Boden stehenden Pfahlteils stark heraufgesetzt. Bei den beiden hier durchgerechneten Beispielen, die der Praxis entnommen sind, war auch in diesen Fällen die Tragkraft der Pfähle vor allem durch die Standsicherheit der Pfahlspitze auf dem tragfähigen Baugrund und nicht so sehr durch die Knicksicherheit begrenzt.

Aus den Kurventafeln Abb. 18 u. 19 kann unter der Voraussetzung gerader Achsform und zentrischer Belastung die Knicklast von durchgehend und teilgestützten Spitzenpfählen, deren Pfahlkopf drehbar, aber seitlich unverschieblich gehalten ist, für die meisten Fälle der Praxis ohne große Rechnung abgelesen werden.

Vom

BAUTECHNIK-ARCHIV

sind noch lieferbar:

Heft 1

v. Rothe, T., Dipl.-Ing., Zeitgemäße Fragen aus dem neueren Schrifttum des Ingenieurbaues. — Hörnlimann, F., Dipl.-Ing., Kolbenlose Pressen (Druckkissen) im Bauwesen. — Weber, H., Dr.-Ing., Grundsätzliches zur Frage der Grundwasserabsenkung. — Schöttgen, J., Dr.-Ing., Einfluß der Verdrehungssteifigkeit der Hauptträger auf die Lastverteilung beim Trägerrost nach Rechnung und Versuch. — Spitzner, P., Dipl.-Ing., Störungsfreie Kaminkopfausbildung.
Gr. 8°. 49 S. mit 52 Textabb. 1947. Geheftet 6,—

Heft 2

Paxmann, W., Ministerialrat i. R., Erfahrungen eines Wasserbauers. Nach einem hinterlassenen Manuskript „Mein dienstlicher Lebenslauf“ des Dr.-Ing. h. c. W. Zander, Honorarprofessor an der T. H. Hannover, Strombaudirektor a. D. — Marquardt, E., Prof. Dr.-Ing., Die Abwasserreinigung und die sich dabei abspielenden stofflichen Vorgänge. — Press, H., Dr.-Ing., Über die Druckverteilung im Boden hinter Wänden verschiedener Art. Mit Ergebnissen eigener Versuche.
Gr. 8°. 54 S. mit 53 Textabb. 1948. Geheftet 6,40

Heft 3

Geleitwort. — Volk, J., Widmung zum 20jährigen Bestehen der Degebo. — Agatz, A., Prof. Dr.-Ing. und Lackner, E., Dr.-Ing., Noch offenstehende Probleme auf dem Gebiete des Grundbaues. — Muhs, H., Dr.-Ing., Arbeiten der Degebo in den Jahren 1938—1948. — Lorenz, H., Prof. Dr.-Ing., Anwendung des seismischen Bodenuntersuchungsverfahrens bei einem Talsperrenbau. — Brennecke, E., Prof. Dr. und Ansorge, K., Dipl.-Ing., Meßtechnische Grundlagen bei Setzungsmessungen an großen Bauwerken. — Förtsch, O., Dr. phil. und Muhs, H., Dr.-Ing., Untersuchungen an einem fehlerhaften Kompressorfundament. — Ramspeck †, A., Dr. phil. und Schulze, G.-A., Dr. phil., Schwingungsuntersuchungen an einfachen Mauerwerkskörpern und Gebäuden. — Hertwig, A., Prof. Dr.-Ing. e. h., Das technische Experiment in der Bodenmechanik.
Gr. 8°. 74 S. mit 76 Textabb. 1949. Geheftet 7,20

Heft 4

Wittmann, H., Prof. Dr.-Ing., Tulla, Honsell, Rehbock, Lebensbilder dreier Wasserbauingenieure am Oberrhein. — Ohlig, R., Dr.-Ing., Berechnung und Bau von Plattenbrücken.
Gr. 8°. 73 S. mit 3 Bildnissen u. 22 Textabb. 1949. Geheftet 7,50

Heft 5

Jähde, H., Bergassessor a. D., Neue Erfahrungen auf dem Gebiete der Verfestigung und Abdichtung des Untergrundes. — Rothmund, L., Prof., Die Gleichungen der Stau- und Senkungsweiten für rechteckigen und parabolischen Gerinnequerschnitt und ihre praktische Anwendung. — Worch, Günter, Prof. Dr.-Ing., Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie.
Gr. 8°. 60 S. mit 41 Textabb. 1949. Geheftet 5,20

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169

DIE BAUTECHNIK

Fachzeitschrift für das gesamte Bauingenieurwesen
Begründet 1923 von Dr.-Ing. ehr. Georg Ernst †
Mit der Beilage „Der Stahlbau“ und Zeitschriftenschau
Erscheint wieder seit Oktober 1947 im 28. Jahrgang
Schriftleitung: Reg.-Baumeister a. D. Johannes Peters, Berlin

Jährlich 12 Hefte DIN A 4

Abonnementspreis:

Inland: vierteljährlich DM 9,— u. Zustellgebühr

Ausland: ganzjährlich DM 36,— und Postgeld

Einzelheft: DM 3,50 und Postgeld

DER STAHLBAU

Schriftleitung: Prof. Dr.-Ing. Kurt Klöppel, Darmstadt

Erscheint wieder als selbständige Zeitschrift
ab 1. Januar 1951 im 20. Jahrgang

Jährlich 12 Hefte DIN A 4

Abonnementspreis:

Inland: halbjährlich DM 7,50 u. Zustellgebühr

Ausland: ganzjährlich DM 15,— und Postgeld

Einzelheft: DM 1,50 und Postgeld

BETON- UND STAHLBETONBAU

früher: BETON U. EISEN

Die Fachschrift für jeden Bauingenieur

Erscheint seit Januar 1950 im 45. Jahrgang

Begründet 1901 von Dr. F. v. Emperger †, Wien

Mit Zeitschriftenschau für das Sondergebiet
Beton und Stahlbeton

Schriftleitung: Reg.-Baumeister a. D. Erich Bornemann, Wiesbaden
und Reg.-Baumeister a. D. Johannes Peters, Berlin

Jährlich 12 Hefte DIN A 4

Abonnementspreis:

Inland: vierteljährlich DM 7,50 u. Zustellgebühr

Ausland: ganzjährlich DM 30,— und Postgeld

Einzelheft DM 3,— und Postgeld

Die Zeitschriftenschau der „BAUTECHNIK“ und
die von „BETON- UND STAHLBETONBAU“ sind auch als
Fortdruck erhältlich

Preis ganzjährlich je DM 4,— und Postgeld

Zu beziehen durch jede Buchhandlung